SÈRIE 5

RECORDEU:

- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.

- Cal arrodonir la nota final de l'examen, no les notes parcials.

- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella amb el número corresponent de la primera pàgina de l'examen.

1.

a)

[1,25 punts]

Si realitzem el producte de la funció obtenim que $f(t) = -t^2 + 50t + 1875$. Calculem la primera derivada $f'(t) = -2t + 50$. Si igualem la primera derivada a 0 obtenim que hi ha un possible extrem relatiu en $t = 25$. Observem que la derivada $f'(t)$ és positiva per valors de t inferiors a $t = 25$ i és negativa per valors de t més grans. Per tant $f(t)$ creix a l'interval $(-\infty, 25)$ i decreix a l'interval $(25, +\infty)$. Això vol dir que en $t = 25$ té un màxim relatiu i el seu valor és $f(25) = 2.500$. Al cap de 25 mesos assoleix el seu valor màxim i aquest valor és de 2.500 euros.

b)

[1,25 punts]

Per trobar l'instant t en el que el producte val 475 euros hem de resoldre l'equació $f(t) = 475$. Obtenim $-t^2 + 50t + 1.875 = 475$, és a dir,
$-t^2 + 50t + 1.400 = 0$.

Si resolem aquesta equació de segon grau obtenim $t = -20$, que no té sentit en el nostre context i $t = 70$. Per tant es deixarà de comercialitzar al cap de 70 mesos.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Obtenció dels intervals: 0,25 p. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25p. Valor del producte en el màxim: 0,25 p. b) Plantejament: 0,5 p. Resolució: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleixen els 475 euros: 0,25 p.

2.

a)

[1,25 punts]

Anomenem x, y, z la quantitat de monedes que hi ha a la caixa de cinquanta cèntims, d'un euro i de dos euros, respectivament.

Plantegem el sistema d'equacions lineals que es desprèn de modelitzar el que diu l'enunciat:

$$\begin{cases} x + y + z & = & 40 \\ \quad x & = & 2z \end{cases}$$

Aquest sistema d'equacions lineals és compatible indeterminat amb solucions:

$$x = 2z$$

$$y = 40 - 3z$$

z paràmetre

El sistema és indeterminat i, per tant, no es pot determinar la quantitat exacta de monedes que hi ha de cada tipus.

b)

[1,25 punts]

El valor total de les monedes de la caixa és $0{,}5x + y + 2z$. Si substituïm pels valors que hem trobat a l'apartat anterior tenim $0{,}5 \cdot 2z + (40 - 3z) + 2z = 40$ euros.

Criteris de correcció:
a) Obtenció del sistema: 0,5 p. Resolució i justificació de que és un sistema indeterminat: 0,75 p.
b) Plantejament: 0,5 p. Obtenció del valor total: 0,75 p.

3.

[2,5 punts]

Considerem la igualtat

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -8\end{pmatrix}.$$

Fent el primer producte de matrius tenim

$$\begin{pmatrix}a & b\\ a & b+c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -8\end{pmatrix}.$$

Si ara realitzem el segon producte obtenim

$$\begin{pmatrix}a-b & 2a-3b\\ a-b-c & 2a-3b-3c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -8\end{pmatrix}.$$

Hem de resoldre, per tant, el sistema

$$\begin{cases} a-b=-1\\ 2a-3b=-2\\ a-b-c=-3\\ 2a-3b-3c=-8\end{cases}$$

Si el resolem per el mètode de Gauss tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -1 & -3\\ 2 & -3 & -3 & -8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & -1 & -3 & -6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -3 & -6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Obtenim per tant la solució $c=2$, $b=0$ i $a=-1$. Per tant, la matriu que buscàvem és

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: Plantejament del producte de matrius: 0,5 punts. Càlcul dels dos productes de matrius. 0,5 punts cadascun. Plantejament del sistema d'equacions: 0,5 punts. Resolució del sistema d'equacions: 0,5 punts.

4.

a)

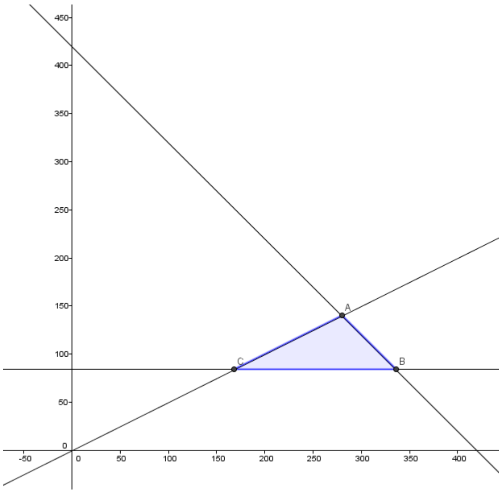
[1,25 punts]

Denotem per x el nombre d'habitacions reservades amb la tarifa estàndard i per y el nombre d'habitacions reservades amb la tarifa reduïda. El sistema d'inequacions donat per les restriccions és

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 84 \\ x + y \leq 420 \\ x \geq 2y \end{cases}$$

La funció objectiu és $F(x, y) = 120x + 90y$

i la regió factible serà:



b)

[1,25 punts]

Els vèrtexs de la regió factible són $A = (280,140)$, $B = (336,84)$ i $C = (168,84)$. Avaluant la funció objectiu als tres vèrtexs s'obté $F(A) = 46.200, F(B) = 47.880\ i\ \ F(C) = 27.720$. Deduïm, per tant, que el benefici màxim s'obté reservant 336 habitacions a la tarifa estàndard i 84 a la reduïda i aquest benefici és de 47.880 euros.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,75 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

5.

a)

[0,75 punts]

Els ingressos venen donats per la funció $I(x) = 58\,x$ (en milers d'euros). Per tant la funció que dona els beneficis mensuals en funció de les unitats produïdes serà:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 58\,x - (\tfrac{1}{2}x^2 - 64x + 4.704) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 122\,x - 4.704.$$

b)

[1 punt]

Resolent l'equació $-\frac{1}{2}x^2 + 122\,x - 4.704 = 0$ determinem que la funció $B(x)$ és positiva, i per tant l'empresa no tindrà pèrdues, quan el nombre d'unitats produïdes estigui dins l'interval $[48,196]$.

Ara hem de trobar el màxim de $B(x)$, que és un polinomi i per tant una funció contínua i derivable a tot el seu domini $[0,\infty)$. Derivant obtenim $B'(x) = -x + 122,$ i igualant la derivada a zero s'obté com a solució $x = 122.$ Podem comprovar fàcilment que és un màxim absolut ja que $B'(x) > 0$ quan $x \in [0,122)$ i $B'(x) < 0$ quan $x > 122$. En el punt on s'assoleix el màxim el benefici obtingut és de $B(122) = 2.738$ milers d'euros.

c)

[0,75 punts]

Denotem per a el nou preu de venta en milers d'euros. La nova funció de beneficis serà

$$F(x) = I(x) - C(x) = a\,x - (\tfrac{1}{2}x^2 - 64x + 4.704) = -\tfrac{1}{2}x^2 + (64 + a)\,x - 4.704.$$

Observem que és una paràbola i que el màxim s'assolirà en el seu vèrtex. Aplicant la fórmula del vèrtex de la paràbola obtenim l'equació

$$\frac{-(64+a)}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 130$$

És a dir, $64 + a = 130$ i per tant cal que $a = 66$. El nou preu de venda haurà de ser per tant de 66.000 euros.

Criteris de correcció: a) Obtenció de la funció de beneficis: 0,75 p. b) Obtenció de l'interval per no tenir pèrdues: 0,25p. Obtenció del valor pel qual s'obté el benefici màxim: 0,25p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p. c) Plantejament: 0,25 p. Obtenció del nou preu de venda: 0,75 p.

6.

a)

[1,25 punts]

Comencem calculant la derivada $f'(x) = 3e^{3x}$. Per tant, el pendent en el punt d'abscissa $x = 0$ serà $f'(0) = 3$.

b)

[1,25 punts]

Quan $x = 0$, la funció pren el valor $f(0) = e^0 = 1$. Per tant, hem de calcular la recta tangent en el punt $(0,1)$. Sabem que el pendent és $m = 3$. Per tant la recta és de la forma $y = 3x + n$. Per trobar el valor de la constant n utilitzem que ha de passar pel punt $(0,1)$. Per tant $1 = 3 \cdot 0 + n$, és a dir, n=1.

Així doncs la recta tangent que estàvem buscant és $y = 3x + 1$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del pendent: 0,75 p. b) Càlcul del valor de l'ordenada en el punt d'abscissa x=0: 0,5 p. Obtenció de la recta tangent: 0,75 p.