Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. El pal central que sosté la lona de la carpa d'un circ se situa perpendicularment sobre el pla d'un terra l'equació del qual és π: $x - z = 6$. Sabem que la cúpula de la carpa (el punt més alt per on passa el pal) és al punt de coordenades $P = (30, 1, 0)$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que conté el pal.
[1 punt]

b) Calculeu les coordenades del punt de contacte del pal amb el terra, i la longitud del pal.
[1,5 punts]

2. Considereu la funció $f(x) = \dfrac{9}{x^2 + x - 2}$.

a) Determineu el domini, les possibles asímptotes, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement de la funció.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'equació general de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 4$. Representeu en un mateix gràfic la funció $f(x)$ i la recta tangent.
[1,25 punts]

3. Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$, que depèn del paràmetre a.

a) Calculeu el rang de la matriu $\boldsymbol{A}$ per als diferents valors del paràmetre a.
[1,25 punts]

b) Si $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial següent: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
[1,25 punts]

4. ***a)*** Considereu la funció $f(x)=\begin{cases}\ln(x), & \text{si } x\in(0,\,\mathrm{e})\\ ax+b, & \text{si } x\in[\mathrm{e},\,4)\end{cases}$, on a i b són nombres reals. Trobeu el valor de a i de b per tal que la funció sigui contínua i derivable a l'interval (0, 4).
[1,25 punts]

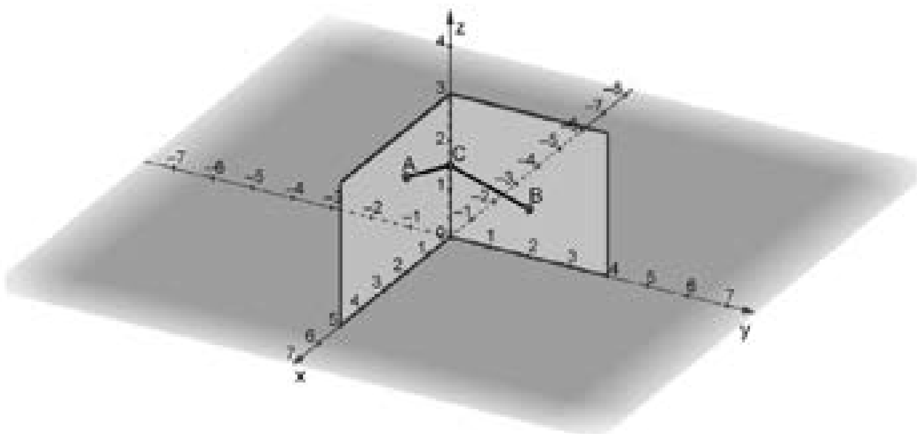
b) Calculeu la funció $g(x)$ que satisfà $g'(x)=\dfrac{x^3}{9x^4+1}$ i que passa pel punt (0, –1).
[1,25 punts]

5. Sigui la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & 0\\ 2 & a+1 & a-1\\ 2a+1 & 0 & -a-3\end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Calculeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu $\boldsymbol{A}$ és invertible.
[1,25 punts]

b) Per al cas $a=3$, resoleu l'equació $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.
[1,25 punts]

6. La imatge següent mostra dues parets perpendiculars d'una sala representades en uns eixos de coordenades, de manera que una paret és al pla $y=0$ i l'altra és al pla $x=0$.



En el punt $A=(2, 0, 2)$ hi volem penjar un altaveu que ha d'estar connectat a un equip de so, el qual està situat a l'altra paret, en el punt $B=(0, 2, 1)$. La connexió entre A i B la farem mitjançant un cable que passi pel punt $C=(0, 0, h)$, situat a la recta vertical d'intersecció de les dues parets. Com que la qualitat del so depèn, entre altres factors, de la longitud del cable que uneix els dos aparells, volem fer una instal·lació amb el mínim de cable possible.

a) Comproveu que la longitud total del cable necessari, en funció de l'altura h per on ha de passar el cable a l'eix vertical OZ, ve donada per l'expressió $L(h)=\sqrt{h^2-4h+8}+\sqrt{h^2-2h+5}$.
[0,75 punts]

b) Calculeu les coordenades del punt C per on ha de passar el cable per tal que la longitud del cable sigui mínima. Calculeu aquesta longitud mínima del cable.
[1,75 punts]