

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 5

Responen a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Siguin les matrius $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que $C^3 = I_2$, en què I_2 és la matriu identitat d'ordre 2, i deduiu que la matriu C és invertible i que $C^{-1} = C^2$. Calculeu C^{2022} .

[1,5 punts]

b) Resoleu l'equació matricial $C \cdot X = A - 2I_2$.

[1 punt]

2. Considereu la funció $f(x) = x^3$ i sigui a un nombre real estrictament positiu.

a) Calculeu l'equació de la recta t tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = a$. Trobeu el punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses (en funció de a).

[1,25 punts]

b) Feu un esbós de la gràfica de la funció f i la recta t . Calculeu el valor de a perquè l'àrea en el primer quadrant limitada per la funció f , la recta t i l'eix de les abscisses sigui $108 u^2$.

[1,25 punts]

3. Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 0 \\ my + (3 - m)z = -6 \\ 2x - y + mz = 6 \end{array} \right\},$$

en què m és un paràmetre real.

a) Discuti el sistema per als diferents valors del paràmetre m .

[1,25 punts]

b) Resoleu el sistema, si és possible, quan $m = 0$ i quan $m = 3$. En cada cas, doneu la posició relativa dels tres plans a \mathbb{R}^3 .

[1,25 punts]

4. A \mathbb{R}^2 , considereu els triangles rectangles que tenen els vèrtexs en els punts $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$ i $B = (0, y)$, amb $x > 0$ i $y > 0$, i en què la suma dels catets és 10.
- a) Expresses l'àrea del triangle AOB en funció de x . Per a quin valor de x l'àrea del triangle AOB és la més gran possible? Quin valor té aquesta àrea màxima?
[1,25 punts]
- b) Expresses la hipotenusa del triangle AOB en funció de x . Per a quin valor de x la hipotenusa del triangle AOB és la més petita possible? Quin és aquest valor mínim?
[1,25 punts]
5. Siguin els punts $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, -1, 1)$ i $D = (1, 0, 1)$.
- a) Comproveu que tres d'aquests punts estan alineats. Determineu quins són els tres punts i calculeu l'equació contínua i l'equació paramètrica de la recta que defineixen.
[1,25 punts]
- b) Calculeu l'equació general o cartesiana del pla que determinen els quatre punts.
[1,25 punts]
6. La columna de l'esquerra de la taula següent mostra l'esquema d'un programa informàtic que s'ha elaborat per a trobar solucions aproximades d'una equació $f(x) = 0$ en un interval (a, b) , sabent que $f(a) \cdot f(b) < 0$. La columna de la dreta recull un exemple de funcionament del programa en què es pot veure com actuaria per trobar una solució de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0,5$ i $b = 2$.

<i>Esquema del programa</i>	<i>Exemple</i>																														
1. Escriure «Introduïu un valor a »	L'usuari introdueix $a = 0,5$																														
2. Escriure «Introduïu un valor b »	L'usuari introdueix $b = 2$																														
3. Escriure «Introduïu una funció $f(x)$ »	L'usuari introdueix $f(x) = x + \ln(x)$																														
4. Calcular $c = (a + b)/2$	El programa calcula la mitjana entre a i b i li assigna el nom $c = (0,5 + 2)/2 = 1,25$																														
5. Si $f(a) \cdot f(c) < 0$, aleshores reassignar $b = c$; en cas contrari, reassignar $a = c$	El programa comprova que $f(0,5) \cdot f(1,25) = (0,5 + \ln(0,5)) \cdot (1,25 + \ln(1,25)) < 0$; per tant, reassigna $b = 1,25$																														
6. Repetir els passos 4 i 5 tants cops com faci falta fins que $f(a) - f(b) < 0,00000001$	El programa va repetint la comprovació anterior, canviant cada vegada els valors de a o de b : <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>a</th> <th>b</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>inici</td> <td>0,5</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>iteració 1</td> <td>0,5</td> <td>1,25</td> </tr> <tr> <td>iteració 2</td> <td>0,5</td> <td>0,875</td> </tr> <tr> <td>iteració 3</td> <td>0,5</td> <td>0,6875</td> </tr> <tr> <td>iteració 4</td> <td>0,5</td> <td>0,59375</td> </tr> <tr> <td>iteració 5</td> <td>0,546875</td> <td>0,59375</td> </tr> <tr> <td>iteració 6</td> <td>0,546875</td> <td>0,5703125</td> </tr> <tr> <td>iteració 7</td> <td>0,55859375</td> <td>0,5703125</td> </tr> <tr> <td>[...]</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		a	b	inici	0,5	2	iteració 1	0,5	1,25	iteració 2	0,5	0,875	iteració 3	0,5	0,6875	iteració 4	0,5	0,59375	iteració 5	0,546875	0,59375	iteració 6	0,546875	0,5703125	iteració 7	0,55859375	0,5703125	[...]		
	a	b																													
inici	0,5	2																													
iteració 1	0,5	1,25																													
iteració 2	0,5	0,875																													
iteració 3	0,5	0,6875																													
iteració 4	0,5	0,59375																													
iteració 5	0,546875	0,59375																													
iteració 6	0,546875	0,5703125																													
iteració 7	0,55859375	0,5703125																													
[...]																															
7. Quan $f(a) - f(b) < 0,00000001$, escriure: «La solució de l'equació és c » i aturar el programa	Després d'unes 30 iteracions, el programa escriu: «La solució de l'equació és 0,56714329»																														

- a) Expliqueu per què aquest programa és capaç de trobar una solució aproximada de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0,5$ i $b = 2$.
[1,25 punts]
- b) Volem aplicar aquest programa per a trobar les tres arrels de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ amb valors de a i b diferents. Trobeu justificadament entre quins valors a i b , per a cada arrel, hem d'aplicar el programa per a trobar aproximacions de cadascuna de les tres arrels de la funció.
[1,25 punts]