Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 2

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Sigui $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada d'una funció $f(x)$.

a) Si sabem que $f(x)$ talla l'eix de les abscisses en $x = 1$, calculeu l'expressió de la funció $f(x)$.
[0,75 punts]

b) Calculeu l'abscissa del punt d'inflexió de $f(x)$ i estudieu la concavitat de la funció.
[0,75 punts]

c) Sabem que l'àrea del recinte limitat per la corba $y = f''(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = a$, amb $a > 2$, és $15u^2$. Calculeu el valor de a.
[1 punt]

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a:

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 2 \\ 2x + ay + z = a \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1,5 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $a = 2$.
[1 punt]

3. Sigui la recta r definida per l'expressió següent:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

a) Determineu la posició relativa de la recta r respecte al pla $\pi: x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si és paral·lela, calculeu la distància de r a π, i si és secant, calculeu el punt de tall.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta s perpendicular al pla π i que talla la recta r en un punt P, la primera coordenada del qual és 5 vegades més gran que la segona.
[1,25 punts]

4. ***a)*** Trobeu una funció polinòmica $y = g(x)$ de grau 3 tal que talli l'eix de les ordenades en el punt (0, 5), que la recta tangent a $y = g(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$ sigui horitzontal i que $g''(x) = 2x + 1$.
[1 punt]

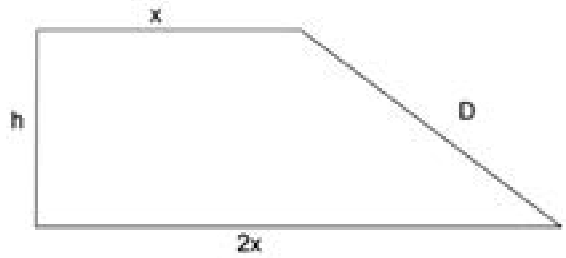
b) Comproveu que la funció $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ té una arrel a $x = 2$ i que és estrictament creixent a l'interval (0, 4). Utilitzeu aquesta informació per a calcular l'àrea determinada per la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.
[1,5 punts]

5. Sigui la matriu $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depèn dels paràmetres a, b i c.

a) Calculeu les matrius $\boldsymbol{X}$ tals que $\boldsymbol{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
[1,5 punts]

b) Determineu els valors de a, b i c perquè la matriu inversa de $\boldsymbol{X}$ sigui $\boldsymbol{X}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
[1 punt]

6. Al pati d'una escola es vol crear una àrea de joc de 30 m^2 per als més petits en forma de trapezi rectangular, de manera que la base més gran mesuri el doble que la base més petita, tal com mostra la figura, i que el costat oblic respecte a les bases (D) sigui tan curt com sigui possible.



a) Justifiqueu que se satisfan les relacions següents: $h = \dfrac{20}{x}$ i $D(x) = \sqrt{\dfrac{400}{x^2} + x^2}$.
[1 punt]

b) Trobeu les dimensions del trapezi per a les quals la longitud del costat D és mínima.
[1,5 punts]