Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 2

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. A l'institut d'en Martí han elaborat tres tipus diferents de rams de roses per a vendre el dia de Sant Jordi. L'opció clàssica consisteix en una rosa i una espiga. L'opció de ram petit està formada per tres roses i dues espigues. I, finalment, l'opció de ram gran consisteix en mitja dotzena de roses i tres espigues. Tots els rams (siguin de l'opció que siguin) porten un bonic embolcall. Sabem que s'han utilitzat 200 roses, 135 espigues i 85 embolcalls.

a) Quants rams s'han elaborat de cada tipus?
[1,75 punts]

b) Si el preu de venda d'un ram de l'opció clàssica és de 3 euros, el d'un ram petit és de 5 euros i el d'un ram gran és de 10 euros, quants diners s'ingressaran si es venen tots?
[0,75 punts]

2. Experimentalment s'ha comprovat que la producció d'un tipus de fruita determinat que es cultiva en hivernacles depèn de la temperatura, segons la funció $f(x) = -x^2 + 46x - 360$, en què x representa la temperatura de l'hivernacle en graus Celsius i $f(x)$ és la producció anual en centenars de quilograms per hectàrea. El preu de venda de la fruita es manté estable a 1,2 euros per cada quilogram.

a) Determineu l'interval de temperatures entre les quals cal mantenir l'hivernacle perquè hi hagi producció de fruita. Calculeu els ingressos anuals per hectàrea si es manté l'hivernacle a 20 °C de temperatura.
[1,25 punts]

b) A quina temperatura s'obté la producció màxima de fruita? Quins ingressos per hectàrea s'obtenen en aquest cas?
[1,25 punts]

3. Una empresa es proposa de fer dos tipus de paneres de Nadal, A i B, per als treballadors i les treballadores. Cada panera de tipus A contindrà 1 pernil, 1 ampolla de cava i 5 barres de torró. D'altra banda, cada panera de tipus B contindrà 2 pernils, 3 ampolles de cava i 2 barres de torró. El cap de magatzem afirma que disposen de 40 pernils, 120 barres de torró i moltes ampolles de cava, i que, per tant, de cava segur que no en faltarà. Es volen fer tantes paneres com sigui possible.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible. Quantes paneres de cada tipus haurà de fer l'empresa?
[1,75 punts]

b) Un cop fet el càlcul, la cap de l'empresa s'ho repensa i diu que és millor fer la mateixa quantitat de paneres de cada tipus. Amb aquesta nova condició, quantes paneres de cada tipus s'hauran de fer?
[0,75 punts]

4. Un grup de biòlegs està estudiant un cultiu de bacteris. La població d'aquests bacteris (en centenars) és donada per la funció $P(t) = a + \dfrac{12t}{t^2 + b}$, en què a i b són constants positives reals i $t \geq 0$ és el temps transcorregut en minuts.

Sabem que a l'instant inicial de l'estudi la població de bacteris era de 6 centenars i que el valor màxim de població s'ha assolit al cap de 2 minuts d'haver iniciat l'estudi.

a) Trobeu els valors de les constants a i b.
[1,25 punts]

b) Calculeu la població màxima de bacteris i estudieu-ne el comportament a llarg termini, és a dir, cap a quin valor s'estabilitza el nombre de bacteris.
[1,25 punts]

5. Considereu les matrius $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Trobeu per a quins valors de a és invertible la matriu obtinguda del resultat del producte $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A}$.
[1,5 punts]

b) Si $a = 2$, trobeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que satisfà l'equació matricial $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ denota la matriu identitat d'ordre 2.
[1 punt]

6. En els models matemàtics que s'utilitzen per a descriure l'evolució d'una malaltia, s'anomena R_0 el nombre mitjà de noves infeccions que cada persona infectada provoca en la població. Quan aquest nombre és inferior a 1, cada individu infectat transmet la malaltia, de mitjana, a menys d'una persona i la malaltia tendeix a desaparèixer. En canvi, si R_0 és més gran que 1, la malaltia s'estén i es produeix una epidèmia.

Quan es descobreix una vacuna efectiva contra la malaltia, es pot controlar l'epidèmia vacunant només una proporció p de la població. És el que es coneix com a *immunitat de grup*. Efectivament, un cop vacunada una proporció $p \in (0, 1)$ de la població, la nova R_0, que s'anomena *efectiva* i es denota amb R_e, és el producte de la R_0 original per la proporció d'individus que no estan vacunats, $1 - p$. I s'aconsegueix controlar l'epidèmia si la R_e és inferior a 1.

a) En el cas del xarampió, s'estima que $R_0 = 15$. Si analitzem una població amb un percentatge d'individus vacunats del 95 %, segons el model descrit, hi ha risc que es produeixi una epidèmia de xarampió en aquesta població?
[0,75 punts]

b) En el cas concret de l'anomenada *grip espanyola* del 1918, s'estima que $R_0 = 4$. Calculeu quin percentatge de població hauria calgut vacunar, com a mínim, per a aturar l'epidèmia d'aquesta malaltia.
[0,75 punts]

c) Expresseu, en general, el llindar de població mínima que cal vacunar en funció del valor R_0 d'una malaltia. Feu un esbós d'aquesta funció per als valors de R_0 entre 1 i 20.
[1 punt]