SÈRIE 1

1.

a) Fem el producte de $v \cdot A$.

$$v \cdot A = (1 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 13{,}5 & 13{,}2 & 4{,}2 \\ 11 & 12{,}5 & 3{,}8 \\ 15 & 14 & 2{,}7 \end{pmatrix} = (39{,}5 \quad 39{,}7 \quad 10{,}7)$$

El vector resultant correspon als ingressos totals en milers d'euros del conjunt dels tres locals en els mesos de gener, febrer i març de 2020 respectivament.

D'altra banda,

$$A \cdot w = \begin{pmatrix} 13{,}5 & 13{,}2 & 4{,}2 \\ 11 & 12{,}5 & 3{,}8 \\ 15 & 14 & 2{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30{,}9 \\ 27{,}3 \\ 31{,}7 \end{pmatrix}$$

i en cada fila hi ha els ingressos totals durant els 3 mesos de cada un dels locals, en milers d'euros.

b) Per calcular el rang de la matriu *B* diagonalitzarem seguint el mètode de Gauss. En el primer pas substituïm la fila 2, F2, per F2-F1, on F1 denota la fila 1, i la fila 3, F3, per F3-2·F1. En el segon pas substituïm F3 per F3+F2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x-8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-7 \end{pmatrix}$$

Per tant, perquè la matriu B tingui rang 2 cal que $x = 7$.

Criteris de correcció: a) Càlcul dels productes: 0,25 p. cadascun. Interpretació del resultat: 0,75 p. b) Si es fa algun procediment per intentar validar que el rang de la matriu és 2: 0,5 p. Càlculs 0,5 p. Obtenció del resulta final: 0,25 p.

2.

a) Si definim les incògnites x, y i z com el preu d'una dotzena d'ous, d'una bossa de farina d'ametlla i d'un paquet de sucre morè, respectivament, obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y = 6{,}5 \\ x + z = 3{,}5 \end{cases}$$

b) El resolem mitjançant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 6{,}5 \\ 1 & 0 & 1 & 3{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 2{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Obtenim, per tant, $x = 1{,}5$, $y = 2{,}5$ i $z = 2$. Per tant, la dotzena d'ous costa 1,5 €, la bossa de farina d'ametlla 2,5 € i el paquet de sucre morè 2 €.

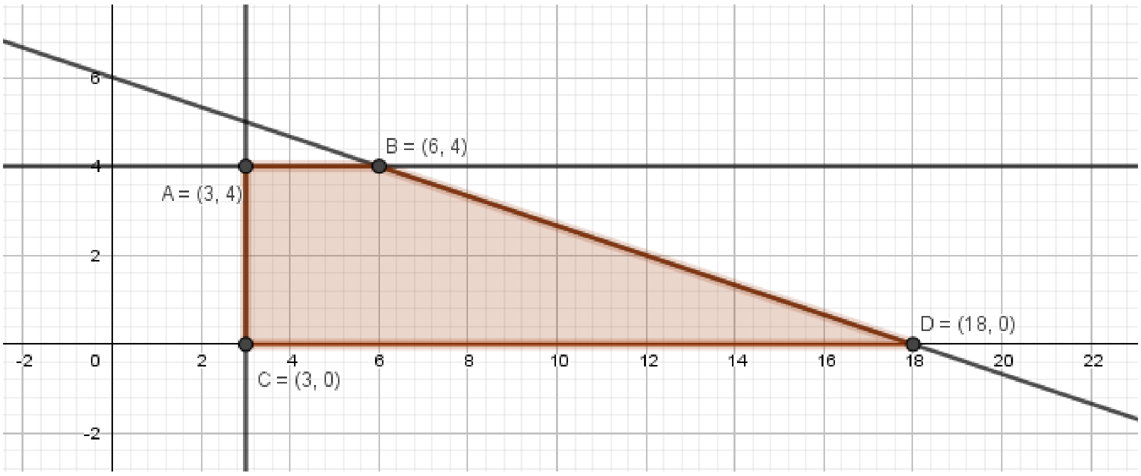
Criteris de correcció: Plantejament del sistema d'equacions: 0,25 p. per cada equació. Resolució: 1 p. Obtenció del resultat final 0,75 p.

3.

a) Si anomenem x el nombre d'anuncis a la ràdio i y el nombre d'anuncis a la televisió tenim les inequacions següents.

$$\left.\begin{array}{c} 1.000x + 3.000y \ \leq 18.000 \\ x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} x + 3y \ \leq 18 \\ x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{array}\right\}$$

La regió factible és



La funció objectiu que ens dona el nombre de clients nous és

$$F(x, y) \ = \ 10x \ + \ 60y.$$

b) Si avaluem la funció en els vèrtex de la regió factible tenim

$$F(3,0) \ = \ 10 \ \cdot \ 3 \ + \ 60 \ \cdot \ 0 \ = \ 30$$

$$F(18,0) \ = \ 10 \ \cdot \ 18 \ + \ 60 \ \cdot \ 0 \ = \ 180$$

$$F(3,4) \ = \ 10 \ \cdot \ 3 \ + \ 60 \ \cdot \ 4 \ = \ 270$$

$$F(6,4) \ = \ 10 \ \cdot \ 6 \ + \ 60 \ \cdot \ 4 \ = \ 300$$

Si es fan 6 anuncis a la ràdio i 4 a la televisió s'obtindran 300 clients nous que correspon al nombre màxim de clients que es pot obtenir amb aquestes restriccions.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

4.

a) En el moment inicial tenia $C(0) = 3 - \frac{1}{5} = \frac{14}{5} = 2{,}8$ milers de clients. Al cap d'un any tindrà $C(1) = 3 - \frac{1}{1-4+5} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ milers de clients.

b) Observem que la funció $C(t)$ està definida per tot valor real t (ja que el denominador $t^2 - 4t + 5$ no s'anul·la mai) i que, per la naturalesa del problema, té sentit per a tot $t \geq 0$. Calculem la derivada :
$C'(t) = \frac{2t-4}{(t^2-4t+5)^2}$. Si igualem la derivada a zero, $\frac{2t-4}{(t^2-4t+5)^2} = 0$, obtenim que $t = 2$, que correspon a l'instant en el qual hi ha una quantitat de clients de $C(2) = 3 - \frac{1}{4-8+5} = 2$ milers.

És fàcil veure què aquest valor correspon a un mínim observant que la derivada canvia de signe en $t = 2$, passant de negativa a positiva. Per tant, després de 2 anys l'empresa tindrà 2.000 clients i començarà a remuntar.

c) Hem de resoldre l'equació

$$3 - \frac{1}{t^2 - 4t + 5} = \frac{14}{5}$$

Tenim que
$\frac{1}{5} = \frac{1}{t^2-4t+5}$, per tant, $t^2 - 4t + 5 = 5$, i simplificant obtenim $t^2 - 4t = 0$, d'on obtenim les solucions $t = 0$ que correspon a l'instant en què s'inicia l'estudi i $t = 4$ que representa el moment en què tornen a tenir els 2.800 clients de l'inici de l'estudi. Per tant, hauran de passar 4 anys per tenir de nou el mateix nombre de clients.

Criteris de correcció: a) Nombre de clients inicials: 0,25 p. Nombre de clients al cap d'un any: 0,25 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Càlcul del valor pel qual s'obté el mínim i comprovació que es tracta d'un mínim: 0,25 p. Càlcul del nombre mínim de clients: 0,25 p. c) Plantejament de l'equació: 0,25 p. Càlculs: 0,5 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

5.

a) El benefici obtingut si les caixes es venen a 6 euros és de $B(6) = -6^2 + 16 \cdot 6 - 55 = -36 + 96 - 55 = 5$ milers d'euros.

Els valors per als quals hi haurà beneficis són els valors de x per als quals $B(x) > 0$. Hem de resoldre, per tant, la inequació $-x^2 + 16x - 55 > 0$. Comencem resolent l'equació $-x^2 + 16x - 55 = 0$. $x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 55}}{-2} = \frac{16 \pm 6}{2}$. Que té per solucions $x = 11$ i $x = 5$. Observem que $B(x) > 0$ si $x \in (5,11)$. Per tant, per què l'empresa tingui beneficis, cal que el preu de la caixa estigui entre 5 i 11 euros.

b) Si derivem la funció obtenim $B'(x) = -2x + 16$. Igualant a zero obtenim que hi ha un extrem relatiu en $x = 8$. Es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per a valors de $x < 8$ i, per tant, la funció és creixent, mentre que és negativa per a valors de $x > 8$ i, per tant, la funció és decreixent.

Per tant, l'empresa obté el benefici màxim si ven cada caixa a 8 euros i el benefici que obté és de $B(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 55 = 9$ milers d'euros.

Criteris de correcció: a) Beneficis si la caixa es ven a 6 euros: 0,5 p. Plantejament de la inequació perquè hi hagi beneficis: 0,25 p. Resolució de la inequació i obtenció dels punts entre els quals ha de prendre valors la x: 0,5 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del punt en el qual s'assoleix el màxim: 0,25 p. Comprovació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

6.

a) Calculem la funció derivada: $f'(x) = 3px^2 - 8x + 7p$. Perquè les rectes siguin paral·leles cal que tinguin el mateix pendent. D'una banda, el pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $f'(1) = 3p - 8 + 7p = 10p - 8$. D'altra banda, el pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 3$ és $f'(3) = 27p - 24 + 7p = 34p - 24$.

Si igualem les expressions dels dos pendents obtenim $10p - 8 = 34p - 24$ i obtenim que, perquè siguin iguals, cal que $p = \frac{2}{3}$.

b) L'equació tangent és de la forma:

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

L'ordenada corresponent al punt d'abscissa $x_0 = 3$ és

$$y_0 = f(3) = 2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 7 \cdot 2 \cdot 3 - 18 = 42$$

El pendent ve donat per

$$m = f'(3) = 3 \cdot 2 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 44$$

I, per tant, l'equació de la recta tangent que busquem és $y - 42 = 44(x - 3)$, és a dir, $y = 44x - 90$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Càlcul dels pendents: 0,25 p. cadascun. Plantejament de la igualtat de pendents: 0,25 p. Obtenció del valor de p: 0,25 p. b) Plantejament de la recta tangent: 0,25 p. Càlcul de l'ordenada: 0,25 p. Càlcul del pendent: 0,25 p. Obtenció de la recta tangent: 0,5 p.