SÈRIE 5

PAUTES PER ALS CORRECTORS

RECORDEU:

Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.

Cal arrodonir la nota final de l'examen, no les notes parcials.

Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

1.

a)

El pendent de la recta tangent és $f'(0)$. Comencem per tant calculant la derivada:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}.$$

Per tant, $f'(0) = 2$.

El punt de tangència és (0, f(0)), és a dir (0, 0) i per tant l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en $x = 0$ és $y = 2x$.

b)

Per estudiar la monotonia de $f(x)$ estudiem el signe de la derivada. Per fer-ho, busquem els valors on la derivada pot canviar de signe que, en aquests cas, només són els punts de tall amb l'eix d'abscisses ja que és una funció contínua. Recordem que $f'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$ i per tant si imposem que s'anul·li tenim $-2x^2+2=0$ que té per solucions $x = 1$ i $x = -1$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, +\infty)$
$-2x^2+2$	$-$	$+$	$-$
$(x^2+1)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	funció decreixent	funció creixent	funció decreixent

Per tant, la funció $f(x)$ és creixent a l'interval (-1, 1) i és decreixent a l'interval

(-$\infty, -1) \cup (1, \infty)$. D'altra banda, té un mínim relatiu en el punt $(-1, f(-1)) = (-1, -1)$ i un màxim relatiu en el punt $(1, f(1)) = (1,1)$.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del pendent: 0,25 p. Obtenció del punt de tangència: 0,25 p. Obtenció de la recta tangent: 0,25 p.

b) Determinació dels intervals de creixement i de decreixement: 0,5 p. Obtenció dels extrems relatius: 0,75 p.

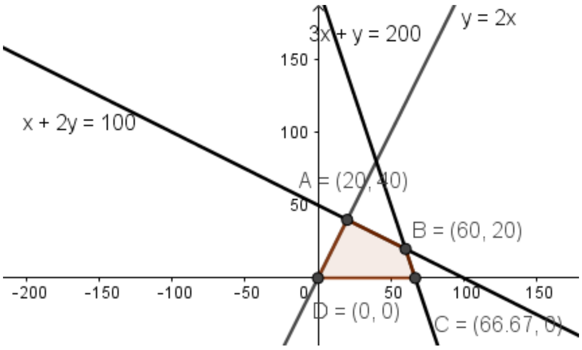
2.

a)

Considerem x = lots venuts de l'oferta *Blava* i y = lots venuts de l'oferta *Groga.*

Tenim les següents restriccions:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 200 \\ x + 2y \leq 100 \\ x \geq (\frac{1}{2})y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Finalment, la funció objectiu és $Ingressos(x, y) = 50x + 30y$.

b)

Els vèrtexs de la regió factible són (0,0), $(20{,}40)$, $(60{,}20)$ i $(\frac{200}{3}, 0)$. Per veure quan obtenim els ingressos màxims calculem el valor de la funció objectiu en els vèrtexs:

$$Ingressos((0{,}0)) = 0 \text{ €},$$

$$Ingressos((20{,}40)) = 50 \cdot 20 + 30 \cdot 40 = 2.200 \text{ €},$$

$$Ingressos((60{,}20)) = 50 \cdot 60 + 30 \cdot 20 = 3.600 \text{ €},$$

$$Ingressos((200/3{,}0)) = 50 \cdot 200/3 + 30 \cdot 0 = 3.333'33 \text{ €}.$$

Per tant caldrà vendre 60 lots de l'oferta *Blava* i 20 de l'oferta *Groga* i s'obtindrà uns ingressos màxims de 3.600 euros.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0.5p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt pel que s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,5 p.

3.

Considerem les variables següents:

x: import de les vendes a nivell estatal de l'any passat,

y: import de les exportacions a Europa de l'any passat,
z: import de les exportacions a països no comunitaris l'any passat.

S'obté el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 1.800.000 \\ y = x + z \\ 0{,}95\, x + 1{,}15\, y + 1{,}1\, z = 1.950.000 \end{cases}$$

El resolem pel mètode de Gauss, multiplicant la tercera equació per 100:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1.800.000 \\ 95 & 115 & 110 & 195.000.000 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 900.000 \\ 0 & 210 & 15 & 195.000.000 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 900.000 \\ 0 & 0 & 15 & 6.000.000 \end{array}\right)$$

Per tant és un sistema compatible determinat i resolent s'obté x=500.000, $y = 900.000\ i\ z = 400.000$.

Finalment, aquest any les vendes a nivell estatal han estat de 475.000 euros, les exportacions a Europa de 1.035.000 euros i les exportacions a països no comunitaris de 440.000 euros.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,75 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de les vendes aquest any: 0,75 p.

4.

a)

La temperatura de l'aigua a la superfície serà de $f(0)=1$ grau centígrad. Per saber a quines profunditats la temperatura és de zero graus hem de resoldre l'equació $f(x)=0$. Obtenim $x^2+5x+4=0$ que té dues solucions, $x=-4$ i $x=-1$. Per tant la temperatura serà de zero graus a 1 metre i a 4 metres de profunditat.

Per obtenir la temperatura a molta profunditat calculem el límit següent:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+5x+4}{x^2+4}=1.$$

Per tant, la temperatura límit a molta profunditat serà d'un grau centígrad.

b)

Per calcular a quina fondària s'obté la temperatura mínima comencem calculant la derivada $f'(x)=\frac{(2x+5)(x^2+4)-2x(x^2+5x+4)}{(x^2+4)^2}=\frac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2}$. Si igualem la derivada a zero, $f'(x)=0$, veiem que la derivada s'anul·la en $x=2$ i $x=-2$. Per la naturalesa del problema només té sentit $x=-2$. Es tracta d'un mínim perquè la derivada és negativa abans del punt $x=-2$ i es positiva entre $x=-2$ i $x=2$.
Si calculem $f(-2)=-\frac{1}{4}$, obtenim que la temperatura mínima s'obté a dos metres de profunditat i la temperatura mínima és de $-\frac{1}{4}$ de grau centígrad.

Criteris de correcció:

a) Determinació de la temperatura a la superfície: 0,25 p. Determinació de les profunditats on la temperatura és de zero graus: 0,25 p. Determinació del límit: 0,75 p.

b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del punt on s'obté el mínim: 0,25 p. Justificació de que es tracta d'un mínim: 0,25 p. Obtenció de la temperatura mínima: 0,25 p.

5.

a)

En la primera prova ha consumit 17 litres per recórrer 300 km, per tant la mitjana és de 0,057 litres per km o, equivalentment, 5,7 litres per 100 km.

En la segona prova ha consumit 17,5 litres per recórrer per 350 km, per tant la mitjana és de 0,05 l per km o, equivalentment, 5 litres per 100 km.

b)

Anomenem x = litres consumits per 100 km per carretera i y = litres consumits per 100 km per ciutat. Volem calcular el consum en litres en 400 km per carretera i 150 per ciutat, per tant volem calcular: $4x + 1{,}5y$.

De les dues primeres voltes sabem que

$$\begin{cases} 2x + y = 17 \\ 3x + 0{,}5y = 17{,}5 \end{cases}$$

Resolent el sistema obtenim que x=4,5 i y=8. Per tant el consum que ens demanen és 4·4,5+1,5·8=30 litres.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,25 p. Determinació de la mitjana de les dues primeres proves: 0,5 p. cadascuna. b) Plantejament del problema: 0,5 p. Obtenció de la solució: 0,75 p.

6.

a)

Calculem les matrius que ens demanen:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix} \quad \text{i}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 4a^3 & a^4 \end{pmatrix}.$$

b)

Deduïm doncs que en general $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$ i per tant,

$$A^{100} = \begin{pmatrix} a^{100} & 0 \\ 100a^{99} & a^{100} \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: a) Càlcul de les potències de matrius A^2 i A^3: 0,5 p. cadascuna. Càlcul de A^4: 0,25 p.. b) Observar la relació i deducció de la matriu A^{100}: 1,25 p.