

## Proves d'accés a la universitat

# Matemàtiques

## Sèrie 1

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real  $k$ :

$$\begin{cases} x + ky + z = 3 + k \\ kx + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

- a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre  $k$ .

[1,25 punts]

- b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas  $k = 1$ , i feu-ne una interpretació geomètrica.

[1,25 punts]

2. a) Donada la funció  $f(x) = \frac{4}{x}$ , calculeu l'equació de la recta tangent a  $y = f(x)$  en el punt

d'abscissa  $x = 1$ . Trobeu també l'equació de la recta normal a  $y = f(x)$  en aquest mateix punt.

[1,25 punts]

- b) Feu un esbós de les gràfiques de la corba  $y = f(x)$  i de la recta  $4x + y = 8$ , i calculeu l'àrea delimitada per aquestes dues gràfiques, l'eix de les abscisses i la recta vertical  $x = 3$ .

[1,25 punts]

3. En  $\mathbb{R}^3$  es donen els punts  $A = (3, 1, 1)$ ,  $B = (0, 0, 1)$ ,  $C = (4, 1, 2)$  i  $D = (1, 1, t)$ , en què  $t$  és un valor real.

- a) Per a quin valor de  $t$  els quatre punts són coplanaris?

[1 punt]

- b) Trobeu el valor de  $t$  per tal que el tetraedre (irregular) que formen els quatre punts tingui un volum de  $5u^3$ .

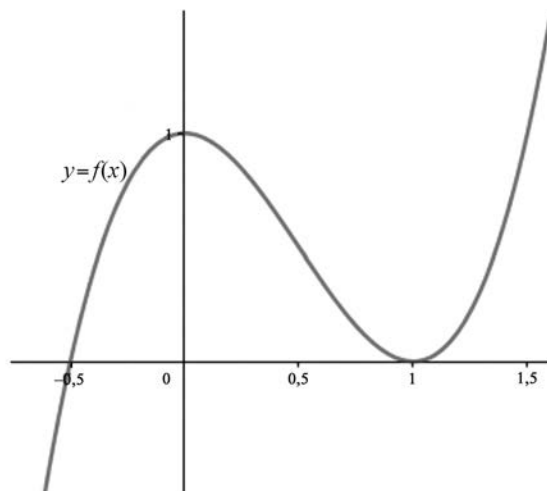
[1,5 punts]

NOTA: El volum d'un tetraedre definit pels vectors  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  i  $\mathbf{v}_3$  és igual a un sisè del valor absolut del determinant de la matriu formada per tots tres vectors,

$$V = \frac{1}{6} |\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)|.$$

4. **a)** En la figura es mostra la gràfica de la funció  $f(x)$ . Representeu de manera esquemàtica la gràfica de la funció derivada de  $f(x)$ . Expliqueu el raonament que heu seguit.

[1,25 punts]



- b)** Calculeu els valors de  $a$  i  $b$  perquè la funció  $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$  tingui un punt d'inflexió en  $x = \frac{1}{2}$  i la seva derivada en aquest punt sigui  $\frac{-3}{2}$ .

[1,25 punts]

5. Sigui la matriu  $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$ , en què  $a$  és un paràmetre real.

- a)** Trobeu per a quins valors de  $a$  la matriu  $A$  és invertible.

[1 punt]

- b)** Comproveu que, per al cas  $a = 3$ , la matriu  $A$  és invertible i resoleu l'equació matri-

cial  $AX = B - 3I$ , en què  $B$  és la matriu  $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

[1,5 punts]

6. Considereu la funció  $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$ .

- a)** Estudieu si té punts crítics i, en cas que en tingui, justifiqueu de quin tipus són. Determineu també quins són els intervals de creixement i decreixement de la funció.

[1,5 punts]

- b)** Comproveu que l'equació  $f(x) = 0$  té una única solució en l'interval  $(-2, 1)$ .

[1 punt]