



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 2

Responen a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Considereu la paràbola $y = 4 - x^2$ i un valor $a > 0$.
 - a) Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = -2ax + a^2 + 4$ i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades.
[1,25 punts]
 - b) Calculeu el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima.
[1,25 punts]
2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real p :

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

- a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre p .

[1,5 punts]

- b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $p = 2$.

[1 punt]

3. Considereu el punt $P = (-1, 3, 1)$, el pla $\pi: x = y$ i la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$.

- a) Trobeu les coordenades del punt P' simètric a P respecte al pla π .

[1,25 punts]

- b) De tots els plans que contenen la recta r , trobeu l'equació cartesiana del que és perpendicular al pla π .

[1,25 punts]

4. Sigui la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ definida en el domini $x > 0$, en què \ln és el logaritme neperià.
- a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba $y = f(x)$ en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt.
[1 punt]
- b) Determineu si la funció $f(x)$ té alguna asímptota horitzontal.
[0,5 punts]
- c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y = f(x)$ i les rectes $x = 1$ i $x = e$. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini $0 < x < 5$, en què quedi representada l'àrea que heu calculat.
[1 punt]

5. a) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial $A^2 X = A - 3I$, en què

I és la matriu identitat.

[1,25 punts]

- b) Una matriu quadrada M satisfà que $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$, en què I és la matriu identitat. Justifiqueu que M és invertible i expresseu la inversa de M en funció de les matrius M i I .

[1,25 punts]

6. Considereu la funció $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.
- a) Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.
[1,25 punts]
- b) Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té exactament dues solucions entre $x = -1$ i $x = 3$.
[1,25 punts]