

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 4

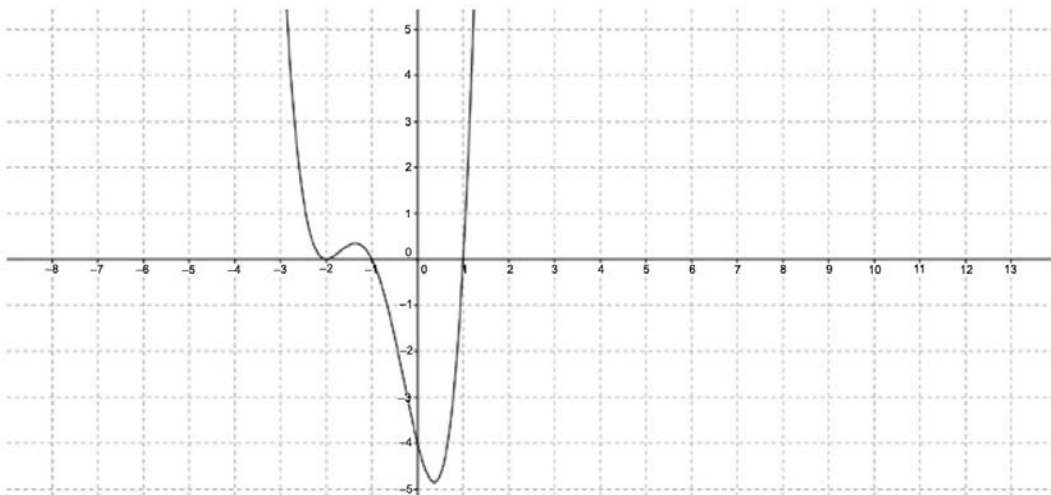
Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Siguin les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = a \cdot x^2$, en què a és un nombre real positiu.
 - a) Trobeu, en funció del paràmetre a , els punts de tall entre les dues corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i feu un esbós de la regió limitada per les dues gràfiques.
[1,25 punts]
 - b) Calculeu el valor de a perquè l'àrea compresa entre $y = f(x)$ i $y = g(x)$ sigui $\frac{27}{4} u^2$.
[1,25 punts]
2. Un avió es desplaça des d'un punt $A = (0, 3, 1)$ cap a una plataforma plana d'equació $\pi: x - 2y + z = 1$ seguint una recta r paral·lela al vector $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$.
 - a) Calculeu les coordenades del punt de contacte B de l'avió amb el pla i la distància recorreguda.
[1,25 punts]
 - b) Calculeu l'equació general del pla perpendicular a la plataforma i que conté la recta r seguida per l'avió des del punt A .
[1,25 punts]
3. Sigui $f(x)$ una funció derivable la gràfica de la qual passa pel punt $(0, 1)$. La gràfica de la seva derivada, $f'(x)$, és la que es mostra en la figura.



- a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 0$.
[1,25 punts]

b) Trobeu les abscisses dels punts singulars de la funció $f(x)$ i classifiqueu-los.

[1,25 punts]

4. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

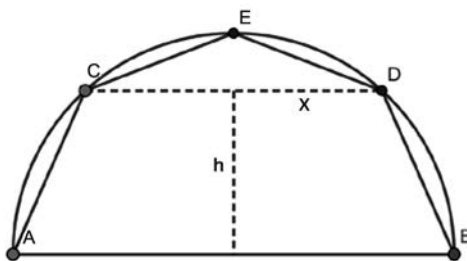
a) Estudieu el rang de la matriu A per als diferents valors del paràmetre a .

[1,25 punts]

b) Comproveu que per a $a = 4$ la matriu A és invertible i que es verifica que $A^{-1} = A^2$.

[1,25 punts]

5. Una empresa està treballant en el disseny d'unes càpsules de cafè. L'empresa ha construït la secció transversal de les càpsules inscrivint-la en una semicircumferència de radi 1, traçant a continuació una corda CD paral·lela al diàmetre AB i incorporant el punt E en el punt mitjà de l'arc CD . D'aquesta manera queda traçat el pentàgon $ACEDB$, tal com es mostra en la figura.



a) Expresses en funció de x i h l'àrea del pentàgon $ACEDB$.

[1,25 punts]

b) Quina ha de ser la distància (indicada en la figura per h) a què s'ha de situar la corda CD de AB per tal que l'àrea del pentàgon $ACEDB$ sigui màxima?

[1,25 punts]

6. Siguin les rectes r i s , expressades per $\frac{x-3}{2} = y = z - 1$ i $(\mu, -\mu, \mu)$, respectivament.

a) Determineu la posició relativa de les rectes.

[1,25 punts]

b) Calculeu la distància entre la recta r i la recta s .

[1,25 punts]