Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

6. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
7. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
8. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
9. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
10. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

- Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
- En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
- En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
- Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

2. Volem construir un marc rectangular de fusta que delimiti una àrea de $2\ m^2$. Sabem que el preu de la fusta és de 7,5 €/m per als costats horitzontals i de 12,5 €/m per als costats verticals. Determineu les dimensions que ha de tenir el rectangle perquè el cost total del marc sigui el mínim possible. Quin és aquest cost mínim?
[2 punts]

Resolució:

Anomenem x a la mesura del costat horitzontal del rectangle i y a la mesura del costat vertical.

Atès que l'àrea del rectangle ha de ser de dos metres quadrats, sabem que $x \cdot y = 2$

La funció que facilita el cost a partir de la mesura dels costats és:

$$\mathrm{C}(x, y) = 7{,}5 \cdot 2x + 12{,}5 \cdot 2y = 15x + 25y$$

Com que $x \cdot y = 2$, sabem que $y = 2/x$ i, per tant, $\mathrm{C}(x) = 15x + 50/x$

Estudiem per a quin valor de $x > 0$ és mínima la funció cost:

$\mathrm{C}'(x) = 15 - 50/x^2$

$$\mathrm{C}'(x) = 0 \leftrightarrow 15 - \frac{50}{x^2} = 0 \leftrightarrow x = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

$\mathrm{C}''(x) = 100/x^3$

$$\mathrm{C}''\left(x = \frac{\sqrt{30}}{3}\right) > 0 \quad \rightarrow \quad \text{Mínim relatiu de } \mathrm{C}(x) \text{ quan } x = \frac{\sqrt{30}}{3} \text{ m}$$

$$y = \frac{2}{x} = \frac{2}{\frac{\sqrt{30}}{3}} = \frac{6}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{5} \text{ m}$$

Les dimensions que hem d'escollir per tal que el marc sigui el més econòmic possible són $x = \frac{\sqrt{30}}{3}$ m pel costat horitzontal i $y = \frac{\sqrt{30}}{5}$ m pel costat vertical del marc.

El cost més econòmic és

$$\mathrm{C}\left(x = \frac{\sqrt{30}}{3}, y = \frac{\sqrt{30}}{5}\right) = 15 \cdot \frac{\sqrt{30}}{3} + 25 \cdot \frac{\sqrt{30}}{5} = \boxed{10\sqrt{30}\ € \ \cong\ 54{,}77\ €}$$

Pautes de correcció:

0,25 punts per l'assignació de les variables.
0,25 punts per la igualtat de l'àrea.
0,25 punts per la funció cost.
0,25 punts per la funció derivada primera.
0,25 punts pel valor singular.
0,25 punts per argumentar que es tracta d'un mínim.
0,25 punts per les dimensions finals.
0,25 punts pel cost mínim.

2. Siguin la recta r: $\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ i el pla $\pi: x - z = 3$.
   a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que és perpendicular al pla π i que el talla en el mateix punt en què el talla la recta r.
   [1 punt]
   b) Trobeu els punts de r que estan a una distància de $\sqrt{8}$ unitats del pla π.
   [1 punt]
   Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Resolució:

- La recta que es demana té vector director $n = (1,0,-1)$ i passa pel punt d'intersecció de r i π. Busquem el punt de la rectaz r,$P_r = (2,1+\lambda,\lambda)$, substituint-lo a l'equació del pla : $2-\lambda-3=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-1$.

El punt de la recta és (2, 0, -1)

Per tant, l'equació paramètrica de la recta buscada serà: $\left.\begin{aligned} x &= 2+\mu \\ y &= 0 \\ z &= -1-\mu \end{aligned}\right\}$

- Busquem els punts de r tals que $d(P_r, \pi) = \sqrt{8}$.

$$d(P_r,\pi) = \frac{|2-\lambda-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|-1-\lambda|}{\sqrt{2}} = \sqrt{8} \Rightarrow |-1-\lambda| = 4 \Rightarrow \lambda = -5 \; o \; \lambda = 3$$

Per tant els punts són (2, -4, -5) i (2, 4, 3).

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel vector normal del pla.
0,25 punts per la forma paramètrica de *r*.
0,25 punts pel punt intersecció del pla i la recta.
0,25 punts per l'equació paramètrica de la recta que es demana.

b)
0,25 punts per plantejar l'equació a resoldre.
0,25 punts pel valors solució.
0,25 punts per un primer punt.
0,25 punts per un segon punt.

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a:

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

c) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1 punt]
d) Resoleu el sistema per al cas a = 2.
[1 punt]

Resolució:

a) El sistema en forma matricial és el següent:

$$A' = A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Anem a calcular el rang(A) i rang(A') per als diferents valors del paràmetre a.

El rang(A) serà màxim quan el determinant de la matriu A sigui diferent de 0. Calculem el determinant de la matriu A.

$$\begin{vmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 5 - a - 7 = a^2 - a - 2$$

Quan resolem $a^2 - a - 2 = 0$ obtenim els valors $a = -1$ i $a = 2$.

- Cas $a \neq -1$ i $a \neq 2$.

$|A| \neq 0$ i per tant rang(A) = 3 = rang(A') = nombre d'incògnites, per tant el sistema és $\boxed{\text{Compatible Determinat.}}$

- Cas $a = -1$

Substituïm el valor d'a i obtenim:

$$A' = A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Com que $|A| = 0$ aleshores rang(A) < 3, però com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, aleshores rang($A$) = 2.

Com que $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 3 + 14 = 15 \neq 0$, aleshores rang($A'$) = 3

Com que rang(A) ≠ rang(A'), aleshores el sistema és $\boxed{\text{Incompatible}}$.

- Cas $a = 2$

Substituïm el valor d'a i obtenim:

$$A' = A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Com que $|A| = 0$ aleshores rang(A) < 3, però com que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, aleshores rang($A$) = 2.

Com que $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 6 + 14 = 0$, aleshores rang($A'$) = 2

Com que rang(A) = rang(A') = 2 < nombre d'incògnites, aleshores el sistema es $\boxed{\text{Compatible Indeterminat amb 1 (3-2=1) grau de llibertat}}$.

b) Cas $a = 2$

Substituïm el valor d'a i obtenim:

$$A' = A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Per aquest cas es tracta d'un sistema compatible indeterminat i, com s'ha vist, el sistema es pot reduir a les dues últimes equacions, ja que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ i rang A=rang A'=2.

Aleshores, traspassant el termes en z al terme independent, el sistema equivalent a resoldre és

$$\begin{cases} x + 2y & = & 3 - z \\ \quad y & = & -2 - z \end{cases}$$

que té per solució, $\boxed{y = -2-z}$ i, substituint la variable y a la primera equació, $\boxed{x} = 3-z-2(-2-z) = 3-z+4+2z = \boxed{7+z}$ amb el que tenim les variables x i y en funció de la variable z que fa de paràmetre i dóna el grau de llibertat al conjunt de solucions.

Observació: El sistema es pot resoldre per qualsevol altre mètode.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pels plantejament matricial i els valors crítics.
0,25 punts pel cas general.
0,25 punts pel primer cas particular.
0,25 punts pel segon cas particular.

b)
0,25 punts per la substitució.
0,25 punt per la identificació de compatible indeterminat.
0,25 punts per la solució y.
0,25 punts per la solució x.

Nota: La solució deixada en funció de qualsevol altre paràmetre o incògnita és també correcta.

4. Considereu la funció $f(x)$, que depèn dels paràmetres reals n i m i és definida per

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + n & si\ 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{3x}{2} + m & x > 2 \end{cases}$$

a) Calculeu els valors de n i m perquè la funció sigui contínua a tot el conjunt dels nombres reals.
[1 punt]

b) Per al cas n = -4 i m = -6, calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.
[1 punt]

Resolució:

a) La funció $f(x)$ està definida per trossos que són funcions contínues (exponencial i polinòmiques), per tant només cal estudiar la continuïtat en x = 0 i en x = 2.

Perquè $f(x)$ sigui contínua en $x = a$ és necessari que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 = f(0) \\ \lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x^2}{4} + n\right) = n \end{cases}$$

i

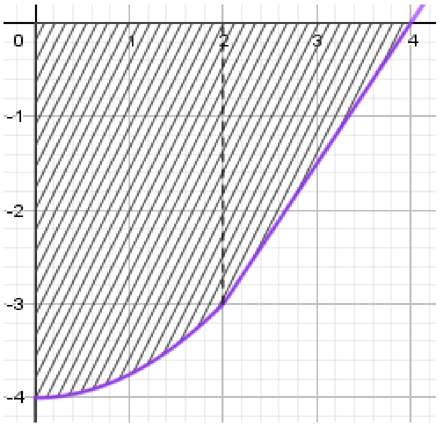
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \left(\dfrac{x^2}{4} + n\right) = 1 + n = f(2) \\ \lim_{x\to 2^+} \left(\dfrac{3}{2}x + m\right) = 3 + m \end{cases}$$

Aleshores per a ser contínua en els dos punts cal que $\left.\begin{array}{r} n = 1 \\ 1 + n = 3 + m \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} n = 1 \\ m = -1 \end{array}$

Per tant, si n = 1 i m = -1 la funció $f(x)$ és contínua per qualsevol nombre real.

b) Quan n = -4 i m = -6

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{4}-4 & si \quad 0 < x \le 2 \\ \dfrac{3}{2}x-6 & si \quad x > 2 \end{cases}$$



Àrea

$$A=\left|\int_0^2\left(\frac{x^2}{4}-4\right)dx\right|+\left|\int_2^4\left(\frac{3}{2}x-6\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{12}-4x\right)\Bigg|_0^2\right|+\left|\left(\frac{3x^2}{4}-6x\right)\Bigg|_2^4\right|=\left|\frac{2}{3}-8\right|+\left|-3\right|=\frac{31}{3}u^2$$

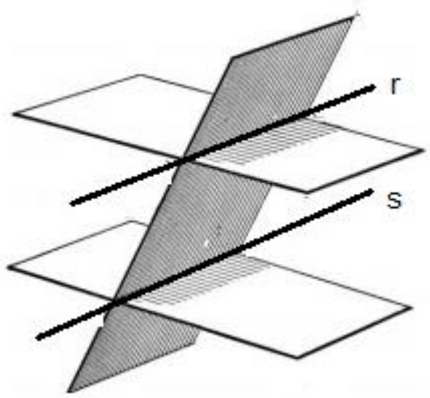
Observació: Evidentment també es pot calcular l´àrea del segon tros com l'àrea del triangle.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per la continuïtat general.
0,25 punts per la condició de continuïtat en x = 0.
0,25 punts per la condició de continuïtat en x = 2.
0,25 punts pel càlcul correcte dels valors de n i de m.

b)
0,25 punts per la substitució de paràmetres.
0,25 punts pel plantejament de les integrals.
0,25 punts pel càlcul de les primitives.
0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow i el càlcul final.

5. Considereu els plans $\pi_1: 2x + ay + z = 5$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 2x + (a+1)y + (a+1)z = 0$, en què a és un paràmetre real.
   a) Estudieu per a quins valors del paràmetre a els tres plans es tallen en un punt.
   [1 punt]
   b) Comproveu que per al cas $a = 1$ la interpretació geomètrica del sistema format per les equacions dels tres plans és la que es mostra en la imatge següent:



[1 punt]

Resolució:

a) Perquè els tres plans es tallin en un punt la matriu del sistema format per les tres equacions ha de ser compatible determinat. Cal que la matriu M del sistema tingui rang 3. Llavors la matriu ampliada també tindrà rang 3 i per tant el sistema serà compatible determinat.

$$M = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = 2a(a+1) + 2a + a + 1 - 2a - 2(a+1) - a(a+1)$$
$$= 2a^2 + 2a + 2a + a + 1 - 2a - 2a - 2 - a^2 - a = a^2 - 1$$

rang M = 3 quan $a^2 - 1 \neq 0$, és a dir $a \neq \pm 1$. En aquests casos els tres plans es tallen en un punt.

b) La situació representada mostra dos plans paral·lels i un altre que els talla.

En el cas a =1 tenim:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=5\\ x+y+z&=1\\ 2x+2y+2z&=0 \end{aligned}\right\}$$ En aquest cas els plans π_2 i π_3 són paral·lels i diferents ja que

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{0}$$

i no paral.lels amb el pla π_1 perqué

$$\frac{2}{1}\neq\frac{1}{1}=\frac{1}{1}$$

per tant, el pla π_1 els tallarà de manera que s'obtindrà, efectivament, la situació geomètrica de la figura.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel plantejament del sistema d'equacions lineals.
0,25 punts pel càlcul del determinant.
0,25 punts per la resolució de la igualtat.
0,25 punts per la identificació del cas SCD.

b)
0,5 punts per la justificació que els plans π_2 i π_3 són paral.lels i diferents.
0,5 punts per la justificació que el pla π_1 no és paral.lel amb els altres dos i els talla en rectes paral.leles. No cal que l'estudiant comprovi que el vector director de la recta *r* i el de la recta *s* són proporcionals.

6. Sabem que una funció $f(x)$ és contínua i derivable a tots els nombres reals, que té com a derivada segona $f''(x) = 6x$ i que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és horitzontal.
   a) Determineu l'abscissa dels punts d'inflexió de la funció f i els intervals de concavitat i convexitat. Justifiqueu que la funció f té un mínim relatiu en $x = 1$.
   [1 punt]
   b) Sabent, a més, que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $y = 5$, calculeu l'expressió de la funció f.
   [1 punt]

Resolució:

a) L'únic candidat a punt d'inflexió és el punt que anul.la la derivada segona, $x = 0$ i per estudiar els intervals de concavitat i convexitat només cal considerar els intervals $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$.

Com que $f''(x) < 0$ per $x < 0$ i $f''(x) > 0$ per $x > 0$ deduïm que la funció f és convexa (∩) en $(-\infty, 0)$ i còncava (∪) en $(0, \infty)$.

Observació: En cas de conflicte entre la terminologia i el grafisme prevaldrà la resposta gràfica.

Per tant la funció té un únic punt d'inflexió en $x = 0$.

D'altra banda, sabem que $f'(1) = 0$ ja que la recta tangent en $x = 1$ és horitzontal. Com $f''(1) = 6 > 0$ deduïm que es tracta d'un mínim relatiu de la funció.

b) Com $f''(x) = 6x$ tenim que integrant que $f'(x) = 3x^2 + c$, on c és una constant real. Ara bé, sabem que en $x = 1$ la recta tangent és horitzontal, així que $f'(1) = 0$. Substituint a l'expressió anterior obtenim que $c = -3$.

Integrant de nou deduïm que $f(x) = x^3 - 3x + k$, on k és una constant real. Com la recta tangent en $x = 1$ és $y = 5$, cal que $f(1) = 5$.

Això ens permet trobar el valor de la constant k:

$$f(1) = 1 - 3 + k = 5$$

d'on $k = 7$ i la funció buscada és $\boxed{f(x) = x^3 - 3x + 7}$.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per identificar l'abscissa $x = 0$.
0,25 punts pels intervals de convexitat/concavitat
0,25 punts per identificar el punt singular.
0,25 punts per justificar que és mínim relatiu.

b)
0,25 punts per la primera primitiva.
0,25 punts pel càlcul de la primera constant d'integració
0,25 punts per la segona primitiva.
0,25 punts pel càlcul de la segona constant d'integració.