



Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
3. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents.** En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.

4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.

5. Penalització per errades de càlcul o transcripció:

- Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores **NO** es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
- En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
- En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
- Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.



Criteris de correcció

Matemàtiques

1. Les pàgines d'un llibre han de tenir cada una 600 cm^2 de superfície, amb uns marges al voltant del text de 2 cm a la part inferior, 3 cm a la part superior i 2 cm a cada costat. Calculeu les dimensions de la pàgina que permeten la superfície impresa més gran possible.

[2 punts]

Resolució:

Si anomenem x l'amplada i y l'alçada de les pàgines, l'enunciat ens diu que la superfície de la pàgina ha de ser de 600 cm^2 , és a dir que $xy = 600$.

Per tant, podem expressar l'alçada en funció de l'amplada, $y = \frac{600}{x}$.

L'amplada de l'àrea impresa serà, després de restar els marges laterals, $x-4$.

L'alçada de l'àrea impresa serà, després de restar els marges superior i inferior, $y-5$.

Per tant, la superfície a maximitzar és $S(x, y) = (x - 4)(y - 5)$.

Quan substituïm la y a l'expressió de S obtenim la superfície només en funció de x :

$$S(x) = (x - 4) \left(\frac{600}{x} - 5 \right) = 600 - 5x - \frac{2400}{x} + 20 = 620 - 5x - \frac{2400}{x}$$

Per a maximitzar S calculem primer les dues primeres derivades.

$$S'(x) = -5 + \frac{2400}{x^2}$$

$$S''(x) = -\frac{4800}{x^3}$$

Els candidats a màxim seran els punts que anul·lin la derivada primera, $S'(x)$. Quan fem

$$S'(x) = 0, \text{ obtenim } 5 = \frac{2400}{x^2} \text{ i, per tant, } x = +\sqrt{\frac{2400}{5}} = +\sqrt{480} = 4\sqrt{30}.$$

(Observem que els valors negatius de x no tenen sentit per al problema.)

Per a comprovar que a $x = 4\sqrt{30}$ hi ha efectivament un màxim, substituïm el valor a la derivada segona i tenim $S''(4\sqrt{30}) < 0$. Per tant, l'amplada que maximitza l'àrea impresa és $x = 4\sqrt{30} = 21,91 \text{ cm}$.

L'alçada que li correspon serà $y = \frac{600}{4\sqrt{30}} = \frac{600 \cdot \sqrt{30}}{4 \cdot 30} = 5\sqrt{30} = 27,39 \text{ cm}$.

Pautes de correcció:



Criteris de correcció

Matemàtiques

- 0,25 punts per la lligadura i l'expressió d' y en termes d' x .
- 0,25 punts per l'expressió inicial de la superfície.
- 0,25 punts per l'expressió de la superfície només en funció d'una variable.
- 0,25 punts per la derivada primera.
- 0,25 punts per la derivada segona.
- 0,25 punts pel valor crític de x .
- 0,25 punts per comprovar que és màxim relatiu
- 0,25 punts pel valor crític de y .

Observació: No cal donar l'expressió decimal de x i y per a tenir l'exercici completament resolt.



2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + k^2y + 3z = 2k \\ 3x + 7y + 7z = k - 3 \end{cases}$$

a) Discuti el sistema per als diferents valors del paràmetre k .

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k = -1$.

[1 punt]

Resolució:

a) La matriu del sistema és $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \\ 3 & 7 & 7 & k-3 \end{pmatrix}$. Igualem el determinant de la

matriu de coeficients a zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = k^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Cas 1: $k \neq \pm 1$. El sistema és compatible determinat $\det(A) \neq 0$ i, per tant,

$$rg(A) = rg(\bar{A}) = 3 = \text{nombre d'incògnites}.$$

Cas 2: $k = 1$

$$rg(A) = rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} = 2, \text{ ja que el menor } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0.$$

$$rg(\bar{A}) = rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 7 & -2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

Per tant, és un sistema incompatible, ja que $rg(A) = 2 < rg(\bar{A}) = 3$.



Cas 3: $k = -1$

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} = 2, \text{ ja que el menor } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0.$$

$$\operatorname{rg}(\bar{A}) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Per tant, és un sistema compatible indeterminat, ja que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\bar{A}) = 2 < 3$.

- b)** Si $k = -1$, el sistema d'equacions és compatible indeterminat amb un grau de llibertat, ja que tenim 3 incògnites i el rang de les matrius és 2. Les solucions del sistema són:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + y + 3z = -2 \\ 3x + 7y + 7z = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + y + 3z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$$

Pautes de correcció:

- a)** 0,25 punts per la presentació matricial del sistema o els primers passos per arribar als valors crítics per a la discussió.
0,75 punts per la discussió dels tres casos (0,25 punts per cada cas).
- b)** 0,5 punts per la resolució del sistema.
0,5 punts per la formulació general de les solucions.

Observació: El model de resolució és orientatiu, ja que tant a l'apartat a) com al b) es poden fer servir mètodes alternatius per a la discussió i la resolució.



3. Un dron es troba en el punt $P = (2, -3, 1)$ i volem dirigir-lo en línia recta fins al punt més proper del pla d'equació $\pi : 3x + 4z + 15 = 0$.

a) Calculeu l'equació de la recta, en forma paramètrica, que ha de seguir el dron. Quina distància ha de recórrer fins a arribar al pla?

[1 punt]

b) Trobeu les coordenades del punt del pla on arribarà el dron.

[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla

d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Resolució:

a) La trajectòria que ha de seguir el dron és la recta que passa pel punt $P = (2, -3, 1)$ i té vector director perpendicular al pla $\pi : 3x + 4z + 15 = 0$. El vector director serà $v_r = (A, B, C) = (3, 0, 4)$. Per tant, en forma paramètrica

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$$

La distància que ha de recórrer és:

$$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 + 15|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5u$$

b) Cal trobar el punt d'intersecció de la recta amb el pla:

$$\begin{cases} (x, y, z) = (2 + 3t, -3, 1 + 4t) \\ \pi : 3x + 4z + 15 = 0 \end{cases} \rightarrow 3(2 + 3t) + 4(1 + 4t) + 15 = 0 \rightarrow t = -1$$

Així, el punt buscat és $(-1, -3, -3)$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per identificar el vector director de la recta.
0,25 punts per donar la forma paramètrica de la recta.
0,5 punts per calcular la distància.

b) 0,5 punts per plantejar la intersecció de la recta amb el pla.
0,5 punts per la resolució i trobar el punt demanat.



4. Considereu la funció $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$.

a) Calculeu-ne el domini i estudeu-ne la continuïtat. Té cap asímptota vertical?

[1 punt]

b) Observeu que $f(-2) = -\frac{2}{3}$, $f(0) = 4$ i $f(2) = -10$. Raoneu si, a partir d'aquesta

informació, podem deduir que l'interval $(-2, 0)$ conté un zero de la funció.

Podem deduir-ho per a l'interval $(0, 2)$? Trobeu un interval determinat per dos enters consecutius que contingui, com a mínim, un zero d'aquesta funció.

[1 punt]

Resolució:

a) En tractar-se d'una funció que és quocient de dos polinomis, el domini d'aquesta funció són tots els nombres reals excepte els que anul·len el denominador:

$$1 - x = 0 \rightarrow x = 1.$$

$$\text{Per tant, } \text{Dom } f = \mathbf{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

La funció f és contínua en tot el seu domini ja que és quocient de polinomis, que són funcions contínues.

L'únic punt on pot presentar una asímptota vertical és en $x = 1$ i, efectivament, ho és ja que:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x} = -\infty \end{array} \right\}$$

b) La funció presenta una discontinuïtat asimptòtica en $x = 1$. Podem aplicar el teorema de Bolzano per determinar un interval que contingui un zero de la funció, però aquest interval no pot contenir $x = 1$.

Així doncs, quan apliquem el teorema de Bolzano a l'interval $[-2, 0]$, podem afirmar que la funció té un zero a l'interval $(-2, 0)$, ja que $f(-2) \cdot f(0) < 0$ però no ho podem afirmar en l'interval $(0, 2)$, ja que aquest interval conté el punt de discontinuïtat $x = 1$.



Avaluant la funció per a $x = -1$, tindrem l'interval demanat:

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = -\frac{2}{3} < 0 \\ f(-1) = \frac{7}{2} > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Per tant, aplicant el teorema de Bolzano a l'interval}$$

$[-2, -1]$, l'interval $(-2, -1)$ conté un zero de la funció.

Pautes de correcció:

- a) 0,25 punts pel domini.
0,5 punts per la continuïtat.
0,25 punts per l'asíptota

Observació: Cal explicitar els límits laterals per a determinar l'asíptota

- b) 0,25 punts per fer servir el teorema de Bolzano.
0,5 punts per raonar que la funció té un zero en un interval però no en l'altre.
0,25 punts per trobar l'interval d'extremes dos enters consecutius.



5. Sigui la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a se satisfà la igualtat $M^2 - M - 2I = 0$, en què I és la matriu identitat i 0 és la matriu nul·la, totes dues d'ordre 2.

[1 punt]

b) Fent servir la igualtat de l'apartat anterior, trobeu una expressió general per a calcular la inversa de la matriu M i, a continuació, calculeu la inversa de M per al cas $a = \sqrt{2}$.

[1 punt]

Resolució:

a) Imposem $M^2 - M - 2I = 0$:

$$M^2 - M - 2I = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-2 & 0 \\ 0 & a^2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Els únics valors per als quals se satisfà la igualtat són $a^2 - 2 = 0 \rightarrow a = \pm\sqrt{2}$

b) Per a l'expressió general, operem la igualtat de l'apartat a:

$$M^2 - M - 2I = 0 \rightarrow M^2 - M = 2I \rightarrow M(M - I) = 2I \rightarrow M \frac{1}{2}(M - I) = I$$

Així doncs, d'aquesta darrera igualtat, deduïm $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I)$.

Per $a = \sqrt{2}$, se satisfà $M^2 - M - 2I = 0$, per tant podem aplicar el resultat anterior:

$$M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Pautes de correcció:

- a) 0,5 punts per les operacions amb les matrius.
0,5 punts per trobar els dos valors del paràmetre.
- b) 0,5 punts per l'expressió general de la inversa.
0,5 punts per donar la inversa demanada.

Observació: En cas que l'estudiant calculi directament només la matriu inversa sense tenir en compte l'expressió general la puntuació de l'apartat b) serà de 0,5 punts.



6. Considereu les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = \frac{1}{x}$, i la recta $x = e$.

a) Feu un esbós de la regió delimitada per les seves gràfiques i l'eix de les abscisses.

Calculeu les coordenades del punt de tall de $y = f(x)$ amb $y = g(x)$.

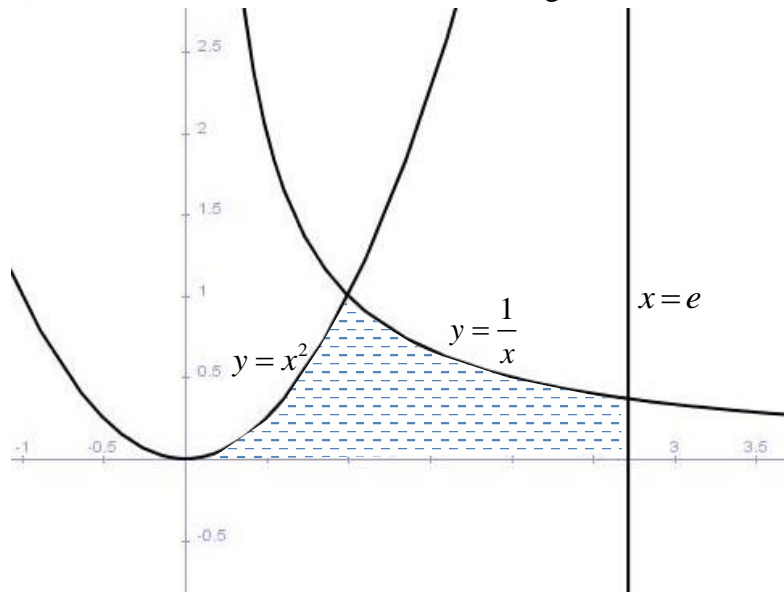
[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió descrita en l'apartat anterior.

[1 punt]

Resolució:

a) No cal fer un estudi exhaustiu de cada gràfica. Poden fer l'esbós directament.



Calculem punts de tall:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \frac{1}{x} \end{array} \right\} \rightarrow x^2 = \frac{1}{x} \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 1)$$

b) Cal expressar l'àrea amb la suma de dues integrals definides:

$$\int_0^1 f(x) dx + \int_1^e g(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \ln(x) \Big|_1^e = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} u^2$$

Pautes de correcció:

a) 0,75 punts per l'esbós de la regió (0,25 per cada expressió).
0,25 punts pel punt d'intersecció.

b) 0,5 punts per expressar l'àrea demanada amb integrals definides.
0,5 punts pel càlcul de les primitives i el resultat final.