Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

6. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
7. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
8. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
9. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
10. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

- Si l'errada que es comet no té més trascendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
- En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
- En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
- Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} 6x+3y+2z&=5 \\ 3x+4y+6z&=3 \\ x+3y+2z&=m \end{aligned}\right\} \text{ per a } m \in \mathbb{R}.$$

a) Expliqueu raonadament que per a qualsevol valor del paràmetre *m* el sistema té una única solució.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema i trobeu l'expressió general del punt solució.

[1 punt]

Resolució:

a) Per a veure que per a qualsevol valor del paràmetre *m* el sistema té solució única, n'hi ha prou en veure que si A és la matriu dels coeficients dels sistema i A' la matriu ampliada aleshores $rang(A) = rang(A') = 3 =$ nombre d'incògnites independentment del valor del paràmetre *m*.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & m \end{pmatrix}$$

Com que $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 48 + 18 + 18 - 8 - 108 - 18 = -50 \neq 0 \Rightarrow$

$rang(A) = 3 \Rightarrow rang(A') = 3$ i per tant el sistema és compatible determinat, sigui quin sigui el valor del paràmetre m.

b) Podem resoldre el sistema pel mètode de Cràmer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{40 + 18 + 18m - 8m - 90 - 18}{-50} = \frac{10m - 50}{-50} = \frac{5 - m}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{36 + 6m + 30 - 6 - 36m - 30}{-50} = \frac{30 - 30m}{-50} = \frac{3m - 3}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & m \end{vmatrix}}{-50} = \frac{24m + 45 + 9 - 20 - 54 - 9m}{-50} = \frac{15m - 20}{-50} = \frac{4 - 3m}{10}$$

Per tant la solució del sistema és $\boxed{\left(\frac{5-m}{5}, \frac{3m-3}{5}, \frac{4-3m}{10}\right)}$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per la matriu del sistema.

0,25 punts pel determinant de la matriu de coeficients.

0,25 punts per la igualtat de rangs a 3.

0,25 punts per la discussió del sistema.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul de x.

0,25 punts pel càlcul de y.

0,25 punts pel càlcul de z.

0,25 punts per l'expressió general del punt solució.

2. Siguin el pla d'equació $\pi: x + y - z = 0$ i el punt $P = (2, 3, 2)$.

a) Calculeu el punt simètric del punt *P* respecte del pla π.

[1 punt]

b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) dels dos plans paral·lels a π que estan a distància $\sqrt{3}$ del punt P.

[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Resolució:

a) Per a calcular el simètric de P, diguem-ne P', respecte del pla $\pi: x + y - z = 0$ primer calcularem la projecció ortogonal del punt P sobre el pla π, diguem-ne Q, i després calcularem $P' = P + 2 \cdot \overrightarrow{PQ}$.

La recta que passa pel punt P i és perpendicular al pla té per vector director el vector normal del pla $(1,1,-1)$ i per tant té equació paramètrica

$$(x, y, z) = (2 + \lambda, 3 + \lambda, 2 - \lambda).$$

Calculem la intersecció del pla π amb aquesta recta:

$$2 + \lambda + 3 + \lambda - (2 - \lambda) = 0$$
$$3\lambda = -3$$
$$\lambda = -1 \Rightarrow Q = (1, 2, 3)$$

$P' = (2, 3, 2) + 2 \cdot \big((1, 2, 3) - (2, 3, 2)\big) = (2, 3, 2) + 2 \cdot (-1, -1, 1) = \boxed{(0, 1, 4)}$.

Observació: També es pot buscar el punt P' imposant que sigui un punt que compleixi que el vector $\overrightarrow{PP'}$ sigui proporcional al vector normal del pla i que el punt mig del segment $\overline{PP'}$ pertanyi al pla.

b) Si els plans han de ser paral.lels al pla $\pi: x + y - z = 0$ aleshores hauran de tenir el mateix vector normal i per tant seran de la forma $\pi': x + y - z = D$.

Imposem ara que quedin a distància $\sqrt{3}$ del punt P.

$$d(P, \pi') = \frac{|2 + 3 - 2 - D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 - D|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$
$$|3 - D| = 3 \Rightarrow 3 - D = 3 \text{ } o \text{ } 3 - D = -3$$

- Si $3 - D = 3 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x + y - z = 0}$.
- Si $3 - D = -3 \Rightarrow D = 6 \Rightarrow \boxed{\pi': x + y - z = 6}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel càlcul de la recta perpendicular.

0,25 punts pel punt intersecció.

0,25 punts pel plantejament del càlcul del simètric.

0,25 punts pel punt simètric.

Apartat b)

0,25 punts per l'equació a resoldre.

0,25 punts per la resolució de l'equació.

0,25 punts per un pla.

0,25 punts per l'altre pla.

3. Sigui la funció $f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}$, amb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

a) Calculeu els valors de *a* i de *b* que fan que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(1, e)$.

[1 punt]

b) Per al cas $a = 3$ i $b = 5$, calculeu l’asímptota horitzontal de la funció *f* quan *x* tendeix a $+\infty$.

[1 punt]

Resolució:

a) Per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(1, e)$ cal que la derivada primera de la funció f s’anul.li en el punt d’abscissa $x = 1$ i que la imatge de la funció en aquest punt sigui e, és a dir, $f'(1) = 0$ i $f(1) = e$.

$$f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}$$

$$f'(x) = a(-2x + b)e^{-x^2+bx}$$

$$f'(1) = a(-2 + b)e^{-1+b} = 0$$

$$f(1) = ae^{-1+b} = e$$

De la primera igualtat com que $e^{-1+b} \neq 0$ aleshores deduïm que $a = 0$ o $b = 2$. Ara bé, si $a = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, per a qualsevol valor de *x*, per tant tenim que $\boxed{b = 2}$ i si substituïm a la segona equacio obtenim $f(1) = ae^{-1+2} = ae = e$ d’on deduïm que $\boxed{a = 1}$.

b) Si $a = 3$ i $b = 5$ aleshores tenim $f(x) = 3 \cdot e^{-x^2+5x}$.

Per a calcular l’asímptota horitzontal quan *x* tendeix a $+\infty$., hem de calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3 \cdot e^{-x^2+5x} = 3 \cdot e^{-\infty} = 0.$$

Per tant, la funció $\boxed{\text{té una asímptota horitzontal en l’eix de les } x\text{’s, } y = 0}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)
0,25 punts per la derivada de la funció.
0,25 punts pel plantejament del sistema a resoldre.
0,25 punts pel càlcul d’un paràmetre.
0,25 punts pel càlcul de l’altre paràmetre.
Apartat b)
0,25 punts per plantejar el límit a calcular.
0,5 punts pel càlcul del límit.
0,25 punts per l’asímptota horitzontal.

4. Sabem que una funció $f(x)$ està definida per a tots els nombres reals i que és derivable dues vegades. Sabem també que té un punt d'inflexió en el punt d'abscissa $x = 2$, que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en aquest punt és $y = -124x + 249$ i que $f(-3) = -4$.

a) Calculeu $f\,''(2)$, $f\,'(2)$ i $f(2)$.

[1 punt]

b) Calculeu $\int_{-3}^{2} f\,'(x)dx$.

[1 punt]

Resolució:

a) Si la funció f té una inflexió en el punt d'abscissa $x = 2 \Rightarrow \boxed{f''(2) = 0}$.

El pendent de la recta tangent és la derivada, per tant si $y = -124x + 249$ és la recta tangent en $x = 2 \Rightarrow \boxed{f'(2) = -124}$. I la recta tangent coincideix amb la funció en el punt $x = 2 \Rightarrow \boxed{f(2) = -124 \cdot 2 + 249 = 1}$.

b) Apliquem la regla de Barrow tenint en compte que la funció f és una primitiva de la funció f'.

$$\int_{-3}^{2} f\,'(x)dx = f(x)|_{-3}^{2} = f(2) - f(-3).$$

Per tant $\boxed{\int_{-3}^{2} f\,'(x)dx = 1 - (-4) = 5}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per $f''(2)$.

0,25 punts per $f'(2)$.

0,5 punts pel $f(2)$.

Apartat b)

0,5 punts pel càlcul de la primitiva i formular la Regla de Barrow

0,25 punts per substituir en la regla de Barrow.

0,25 punts pel càlcul lfinal.

5. Siguin les rectes $r_1 \colon x - 1 = \frac{y-2}{-1} = z - 5$ i $r_2 \colon (x, y, z) = (2 - 3\lambda, -1 + \lambda, 2)$.

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que conté la recta r_1 i és paral·lel a la recta r_2.

[1 punt]

b) Digueu quina condició s'ha de complir perquè existeixi un pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2. Amb les rectes r_1 i r_2 de l'enunciat, comproveu si existeix un pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2.

[1 punt]

Resolució:

a) $r_1: (x, y, z) = (1, 2, 5) + \mu(1, -1, 1)$ i $r_2: (x, y, z) = (2, -1, 2) + \lambda(-3, 1, 0)$

Si el pla ha de contenir la recta r_1 haurà de passar pel punt $(1, 2, 5)$ i contenir el vector $v_1 = (1, -1, 1)$ a la direcció del pla. I si el pla ha de quedar paral.lel a la recta r_2 també haurà de tenir el vector $v_2 = (-3, 1, 0)$ a la direcció.

Per tant el vector normal del pla serà $v_1 \times v_2$.

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & 1 & -3 \\ j & -1 & 1 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -3, -2) \sim (1, 3, 2)$$

Així l'equació cartesiana del pla serà $x + 3y + 2z = D$ i per obtenir D imposem que el pla passi pel punt $(1, 2, 5)$, és a dir $D = 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 17$. Per tant l'equació que ens demanen és $\boxed{x + 3y + 2z = 17}$.

b) Per tal que existeixi un pla que contingui una recta i quedi perpendicular a l'altra recta, les dues rectes inicials han de ser perpendiculars entre sí. En altres termes, els vectors directors de les rectes han de ser perpendiculars, és a dir, han de tenir producte escalar igual a zero.

En el nostre cas tenim

$$v_1 \cdot v_2 = (1, -1, 1) \cdot (-3, 1, 0) = -3 - 1 + 0 = -4 \neq 0.$$

i, per tant, no existeix cap pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2, ni a l'inrevés, ja que d'existir aleshores les dues rectes serien perpendiculars quan no ho són ja que el producte escalar dels seus vectors directors és diferent de 0.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per veure que el vector $v_1$està a la direcció del pla.

0,25 punts per veure que el vector v_2 està a la direcció del pla.

0,25 punts pel càlcul del vector normal.

0,25 punts per l'equació del pla.

Apartat b)

0,5 punts per la condició de perpendicularitat entre les rectes (qualsevol és suficient).

0,25 punts per la comprovació d'alguna de les condicions.

0,25 punts per l'explicitació del raonament i conclusió final.

6. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Si $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu identitat d'ordre 3, calculeu per a quins valors de k la matriu $A + kI$ té inversa. Trobeu, si existeix, la matriu inversa de $A - 2I$.

[1 punt]

b) Calculeu la matriu X que satisfà l'equació $X \cdot A + A^t = 2 \cdot X$, en que A^t és la matriu transposta de la matriu A.

[1 punt]

Resolució:

a) La matriu $A + kI$ té inversa si i només si $|A + kI| \neq 0$.

$$|A + kI| = \begin{vmatrix} -1+k & 0 & 1 \\ 0 & -1+k & 0 \\ 1 & 1 & 1+k \end{vmatrix} = (1+k)(-1+k)^2 - (-1+k) =$$
$$= (k-1)\big((k+1)\cdot(k-1) - 1\big) = (k-1)(k^2-1-1) = (k-1)(k^2-2).$$

Per tant, $|A + kI| \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{k \neq 1, \pm\sqrt{2}}$.

En particular, $A - 2I$ sí que és invertible, ja que correspon al cas $k = -2$.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - 2I| = -9 + 3 = -6$$

$$(A - 2I)^{-1} = \boxed{\frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}}$$

b) $X \cdot A + A^t = 2 \cdot X$

$$X \cdot A - 2 \cdot X = -A^t$$
$$X(A - 2I) = -A^t$$
$$X(A-2I)(A-2I)^{-1} = -A^t(A-2I)^{-1}$$
$$X = -A^t(A-2I)^{-1}$$

$$X = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \\ 6 & 4 & 12 \end{pmatrix}}$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel càlcul del determinant.

0,25 punts pels valors de *k*.

0,25 punts per la justificació que existeix la inversa.

0,25 punts pel càlcul de la matriu inversa.

Apartat b)

0,25 punts pel traspàs de termes.

0,25 punts per treure factor comú.

0,25 punts per multiplicar per la inversa.

0,25 punts pel càlcul final.