SERIE 1

1. Un venedor d'una llibreria de vell cobra, a més a més d'un sou fix, diferents comissions depenent del tipus de llibre que ven. Cobra 1 € per cada còmic, 1,5 € per cada revista i 2 € per cada novel·la.
Ahir, va vendre el doble de revistes que de novel·les, 5 còmics menys que revistes, i va aconseguir en total una comissió de 30 €.
Quantes publicacions va vendre de cada tipus? *[2,5 punts]*

Si anomenem x el nombre de còmics venuts, y el nombre de revistes venudes i z el nombre de novel·les venudes, sabem que:

$$\begin{aligned} y &= 2z \\ x &= y-5 \\ x+1{,}5y+2z &= 30 \end{aligned}$$

Per tant, hem de resoldre el sistema:

$$\begin{aligned} x-y &= -5 \\ y-2z &= 0 \\ 2x+3y+4z &= 60 \end{aligned}$$

El resolem utilitzant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 60 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 70 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 70 \end{array}\right)$$

D'on obtenim que $x = 5$, $y = 10$ i $z = 5$. És a dir, s'han venut 5 còmics, 10 revistes i 5 novel·les.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 1 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,5 p.

2. L'1 de gener de 2019 va sortir al mercat un nou model d'un producte tècnic d'esquí. La funció de tercer grau $f(x) = 10\,x^3 - 210\,x^2 + 1470\,x$ ens dona el nombre total d'unitats venudes, en què x denota el nombre de mesos transcorreguts, des del llançament del producte, durant el primer any (és a dir, $x \in [0,12]$).
   a) Quantes unitats s'havien venut al cap de 3 mesos? Quantes se'n van vendre al cap d'un any? Determineu la taxa de variació mitjana entre els mesos 3 i 12. *[1,25 punts]*
   b) Comproveu que la funció és creixent en l'interval $[0,12]$ i trobeu en quin instant el creixement ha estat més lent. *[1,25 punts]*

a) Per saber les unitats venudes al cap de 3 mesos cal calcular $f(3) = 2.790$, per tant, s'havien venut 2.790 unitats. Al cap d'un any es van vendre $f(12) = 4.680$ unitats.

Pel que fa a la taxa de variació mitjana, tenim que

$$TVM(3,12) = \frac{f(12) - f(3)}{12 - 3} = \frac{4.680 - 2.790}{9} = 210\,.$$

b) Com que f és una funció polinòmica de grau 3, és contínua i derivable en tots els reals. Per estudiar el creixement de la funció comencem calculant la funció derivada:

$$f'(x) = 30x^2 - 420\,x + 1.470.$$

Igualem $f'(x) = 0$ per obtenir els possibles màxims i mínims. L'únic zero el trobem en el punt d'abscissa $x = 7$. Observem que $f'(x) = 30(x-7)^2$, per tant, deduïm fàcilment que $f'(x) \geq 0$ per a tots els reals, i que $f'(x) = 0$ només per a $x = 7$. Així doncs, la funció f és creixent per a $x \in [0,12]$ i l'instant en què el creixement és més lent és als 7 mesos del llançament del producte (és on la funció derivada assoleix el valor mínim).

Criteris de correcció: a) Obtenció de les unitats venudes als 3 mesos: 0,25 p. Obtenció de les unitats venudes al cap de l'any: 0,25 p. Obtenció de la TVM: 0,75 p. b) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Justificació que la funció és creixent: 0,5 p. Obtenció del punt on el creixement és més lent: 0,5 p.

3. El cost d'elaboració d'un menú en un restaurant és de 8 €. S'ha realitzat un estudi de mercat i s'ha arribat a la conclusió que si el preu del menú és de 18 € entren a dinar al restaurant 120 clients. També s'ha conclòs que la relació entre el preu del menú i el nombre de clients és lineal, de manera que, per cada euro que augmentem el preu del menú, disminueix en 4 el nombre de clients. I a l'inrevés, per cada euro que disminuïm el preu, augmenta en 4 el nombre de clients.
   a) Obteniu la funció que expressa el benefici del restaurant en funció del nombre d'euros en què augmentem o disminuïm el preu inicial del menú. *[1,25 punts]*
   b) Trobeu en quants euros cal augmentar o disminuir el preu inicial del menú per tal que el restaurant obtingui el màxim benefici. Quin seria el preu final del menú i quin seria el benefici obtingut amb aquest preu? *[1,25 punts]*

a) Comencem fent un esquema del plantejament. Anomenem x el sobrepreu sobre els 18 €.

Preu menú (€)	Benefici (€)	Nombre de clients	Benefici total (€)
18	10	120	$10 \cdot 120 = 1.200$
$18+x$	$10+x$	$120-4x$	$(10+x)(120-4x)$

Per tant, la funció que expressa el benefici del restaurant és

$$B(x) = (10+x)(120-4x) = 1200 + 80x - 4x^2.$$

b) Observem que la funció benefici és una paràbola amb coeficient de grau 2 negatiu i, per tant, tindrà el seu màxim en el vèrtex. També podem obtenir aquest màxim derivant i igualant a zero la derivada:

$$B'(x) = 80 - 8x.$$

Igualant a zero obtenim que hi ha un extrem relatiu en $x = 10$. Veiem clarament que es tracta d'un màxim perquè $B'(x) > 0$ per $x < 10$ i $B'(x) < 0$ per $x > 10$.

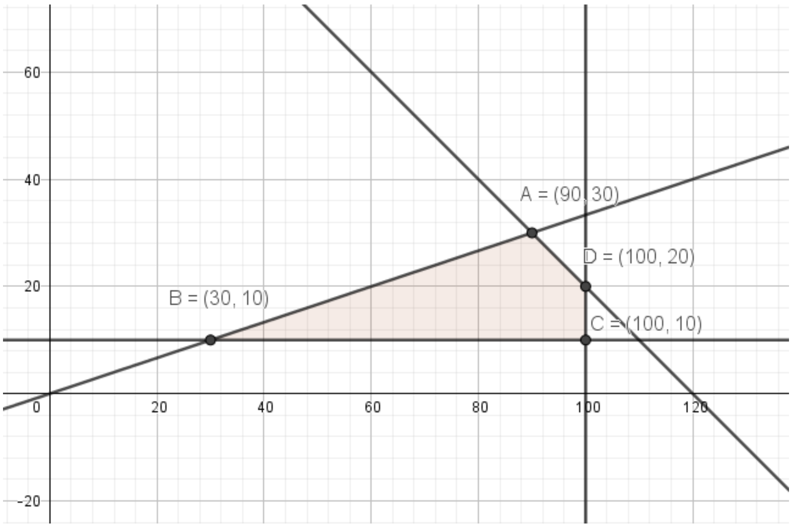
Per tant, es conclou que per maximitzar els beneficis el restaurant ha d'apujar el menú en 10 €. El preu final del menú serà de 28 € i el benefici màxim obtingut amb aquest preu serà de $B(10) = 1.600$ €.

Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,5 p. Obtenció de la funció de beneficis: 0,75p. b) Obtenció dels euros que s'ha d'apujar el menú: 0'5 p. Justificació que és un màxim: 0,25 p. Obtenció del preu final del menú: 0,25 p. Obtenció dels beneficis màxims: 0,25 p.

4. Un fabricant de mobles de jardí fabrica cadires i taules de fusta d'exterior. Cada cadira li aporta un benefici de 20 € i cada taula un de 25 €. Sabem que cada mes pot produir com a màxim un total de 120 mobles entre els dos productes. També sabem que, com a màxim, pot fabricar 100 cadires i que ha de fabricar un mínim de 10 taules. D'altra banda, el nombre de cadires fabricades ha de ser igual o superior al triple de taules fabricades.
   a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible. *[1,25 punts]*
   b) Quina és la producció mensual que li aporta el màxim benefici un cop venuda? Quin és aquest benefici? *[1,25 punts]*

a) Anomenem x el nombre de cadires fabricades i y el nombre de taules fabricades en un mes.
L'enunciat del problema ens dona les restriccions següents:

$$\begin{cases} x + y \leq 120 \\ x \leq 100 \\ y \geq 10 \\ 3y \leq x \end{cases}$$



Els beneficis venen donats per la funció $F(x, y) = 20x + 25y$.

b) Si avaluem la funció en els quatre vèrtexs, tenim que:

$$F(90,30) = 2.550 \text{ €}$$
$$F(30,10) = 850 \text{ €}$$
$$F(100,10) = 2.250 \text{ €}$$
$$F(100,20) = 2.500 \text{ €}$$

Per tant, la funció objectiu assoleix en la regió factible el seu valor màxim en el punt $(90,30)$ i aquest màxim pren el valor 2.550 €.
Així doncs, per maximitzar els beneficis, cal vendre una producció de 90 cadires i 30 taules. Amb aquesta producció s'aconseguiran 2.550 € de benefici.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

5. Considereu les matrius $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

   a) Comprova que es compleix que $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^2$. *[1,25 punts]*
   b) Resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$ en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2. *[1,25 punts]*

a) Per fer aquesta comprovació comencem calculant la matriu A^2:

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Per comprovar que $A^{-1}=A^2$ hem de veure que $A^2\cdot A=I$. Fem, doncs, el càlcul de $A^2\cdot A$:

$$A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I.$$

Com que, efectivament hem obtingut que $A^2\cdot A=\mathrm{I}$ aleshores $A^{-1}=A^2$.

Evidentment, una altra solució correcta alternativa seria trobar A^{-1} i comprovar que efectivament $A^{-1}=A^2$.

b) Si aïllem la X respectant la no commutativitat de les matrius obtenim

$$X=A^{-1}\cdot(I-B).$$

Però com què $A^{-1}=A^2$ podem resoldre l'equació fent

$$X=A^{-1}\cdot(I-B)=A^2\cdot(I-B)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right)=$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Un altre cop tenim una solució alternativa que passaria per considerar $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ i trobar la solució del sistema de quatre equacions i quatre incògnites que se'n deriva.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,75 p. Càlculs: 0,5 p. b) Plantejament: 0,75 p. Càlculs: 0,5 p.

6. El benefici d'una empresa, expressat en milions d'euros, és donat per la funció següent, en què x indica el nombre d'anys que han passat des del moment que va començar a funcionar:

$$B(x) = \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9}.$$

a) Quin és el benefici en el moment en què l'empresa comença a funcionar? En quin moment l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues? *[1,25 punts]*

b) En quin moment aconsegueix l'empresa el benefici màxim? Quin és aquest benefici màxim? *[1,25 punts]*

a) Per trobar el benefici en el moment en què es posa en funcionament l'empresa hem de calcular $B(0)$. Observem que $B(0) = 0$ i, per tant, en el moment inicial l'empresa no té ni beneficis ni pèrdues.

Per saber quan l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues mirem quan s'anul·la la funció benefici.

$$B(x) = 0 \ \leftrightarrow\ \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9} = 0 \ \leftrightarrow\ x(4x-9) = 0.$$

Per tant $B(x)$ només s'anul·la per $x = 0$ i per $x = \frac{9}{4} = 2{,}25$. Observem, d'altra banda, que $B(x)$ està ben definida per a tot x i que per als valors de $x \in \left(0, \frac{9}{4}\right)$ és positiva. Per tant, l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues quan porta $\frac{9}{4}$ d'any en funcionament, és a dir, als 2 anys i 3 mesos.

b) Per trobar el punt on s'assoleix el màxim, comencem calculant la derivada de la funció $B(x)$:

$$B'(x) = \frac{-5x^2-40x+45}{(x^2+9)^2}.$$

Igualem la derivada a zero: $B'(x) = 0$ i obtenim dues solucions $x = -9$ i $x = 1$. Observem que la derivada, $B'(x)$, és positiva entre $x = 0$ i $x = 1$ i, per tant, el benefici és creixent en aquest interval de temps. A partir de $x = 1$ la funció benefici és decreixent perquè la derivada és negativa. Per tant, en $x = 1$, és a dir, al primer any, la funció benefici assoleix un màxim, i a partir d'aquí la funció benefici disminueix. El valor del benefici màxim és:

$$B(1) = \frac{5+20}{1+9} - \frac{20}{9} = \frac{25}{10} - \frac{20}{9} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18} = 0{,}278 \text{ milions d'euros.}$$

Criteris de correcció: a) Càlcul del benefici inicial: 0,5 p. Càlcul de l'instant on comença a tenir pèrdues: 0,5 p. Justificació de que en aquell instant passa de tenir beneficis a tenir pèrdues (i no al revés): 0,25 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Càlcul del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Comprovació de que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul del benefici màxim: 0,25 p.