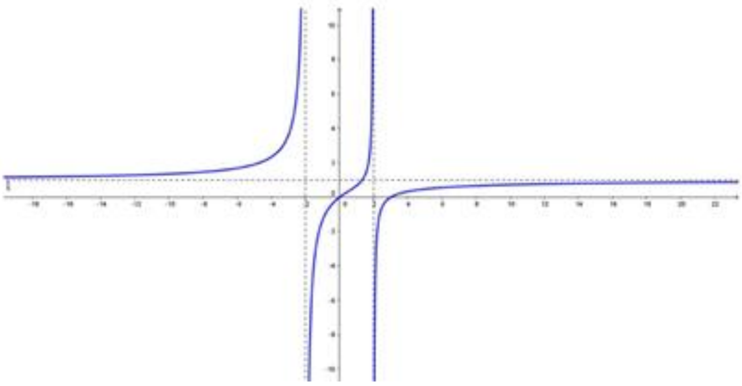
SÈRIE 5

1. Sigui la funció $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-4}$
   a. Indiqueu-ne justificadament el domini i determineu els punts en què la gràfica de *f* talla l’eix de les abscisses. *[1 punt]*
   b. Estudieu-ne el creixement i feu un esbós aproximat de la gràfica de la funció. *[1 punt]*

a) $x^2 - 4 = 0$ si $x = \pm 2$, per tant, el domini de f són tots els nombre reals excepte aquests dos. D'altra banda, $x^2 - 3x = 0$ quan x = 0 o x = 3: la gràfica de *f* talla l'eix d'abscisses en els punts (0,0) i (3,0).

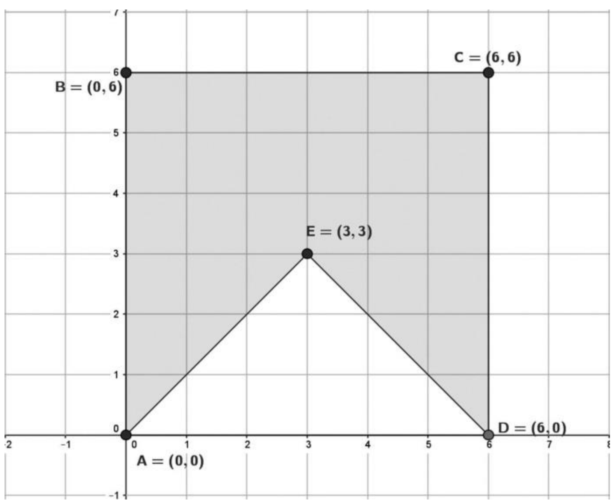
b) La derivada de la funció *f* és $f'(x) = \frac{3x^2-8x+12}{(x^2-4)^2}$. Com que $3x^2 - 8x + 12 = 0$ no té solucions reals i *f'* sempre és positiva la funció *f* és creixent en tot el seu domini. La seva gràfica aproximada és:



Criteris de correcció: a) Determinació del domini, expressat de qualsevol forma: 0,5 p. Punts de tall amb l'eix d'abscisses: 0,5 p.. b) Estudi del creixement: 0,5 p. Gràfica aproximada: 0,5 p

---

2. Considereu el pentàgon ABCDE de la figura següent:



a) Justifiqueu que la regió ombrejada no es pot representar mitjançant un sistema d'inequacions. *[1 punt]*
b) Escriviu el sistema d'inequacions que determina els punts de la frontera i de l'interior del triangle AED. *[1 punt]*

a) Si considerem la recta que passa pels punts A, E i C, d'equació $y = x$, determina dos semiplans $y < x$ i $y > x$, i cap dels dos pot contenir alhora els punts B i D.

b) La recta AE es $y = x$. La recta ED es $y = -x + 6$. La recta AD es $y = 0$. El sistema d'inequacions es:

$$\begin{cases} y \leq x \\ y \leq -x + 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Criteris de correcció: a) Raonament correcte: 1 p. b) Equacions: 0,5 p. Sistema d'inequacions: 0,5 p.

---

3. Sigui $y = f(x)$ una paràbola que té el vèrtex en el punt V = (0, −4) i talla l'eix de les abscisses en els punts (−2, 0) i (2, 0).
a) Determineu-ne l'equació. *[1 punt]*
b) Sigui una funció g tal que $g'(x) = f(x)$. Estudieu el creixement de la funció g, determineu-ne les abscisses dels extrems relatius i classifiqueu-los.*[1 punt]*

a) L'equació de la paràbola serà $y = a(x - 0)^2 - 4$ i, si ha de passar pels dos punts que ens donen, obtenim que $a = 1$. Per tant, l'equació de la paràbola és $y = x^2 - 4$. Alternativament es pot plantejar un sistema de tres equacions i tres incògnites a partir dels tres punts.
b) La paràbola és positiva per a $x < -2$ o $x > 2$, i negativa per $-2 < x < 2$. Per tant, la funció g és creixent en els dos primers intervals i decreixent en l'altre. Conseqüentment, g té un màxim relatiu en $x = -2$ i un mínim relatiu en $x = 2$.

Criteris de correcció: a) 1 p. b) Raonament del creixement: 0,5 p. Determinació d'extrems i classificació: 0,5 p.

---

4. Considereu el sistema d'equacions $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{cases}$

Justifiqueu si les afirmacions següents són certes:

a) Aquest sistema d'equacions representa dues rectes paral·leles perquè totes dues tenen pendent −1. *[1 punt]*

b) Aquest sistema és compatible determinat i la solució és $x = 1$, $y = 1$. *[1 punt]*

a) Les rectes son $y = 2x - 1$ que té pendent 2 i $y = -x + 2$ que té pendent -1. Per tant no són paral·leles.

b) Si resolem el sistema format per les dues equacions obtenim la solució $x = 1$, $y = 1$. Alternativament podem comprovar que $x = 1$, $y = 1$ satisfà les dues equacions.

Criteris de correcció: a) Raonament que no poden ser paral·leles: 1 p. b) Raonament que aquesta és la solució:1 p.

---

5. Un fabricant d'automòbils produeix els models Record i Astrid. Desa la producció en tres naus. A la primera nau té 150 vehicles del model Record i 120 vehicles del model Astrid. A la segona guarda 80 Record i 140 Astrid. Finalment, a la tercera nau emmagatzema 250 Re-cord i 125 Astrid. A més, el preu dels automòbils Record és de 6.520 €, mentre que cada Astrid val 8.130 €. Tota aquesta informació està recollida en les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 6.520 \\ 8.130 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Què representa la matriu $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$? Calculeu-la. *[1 punt]*

b) Què representa la matriu $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}$? Calculeu-la. *[1 punt]*

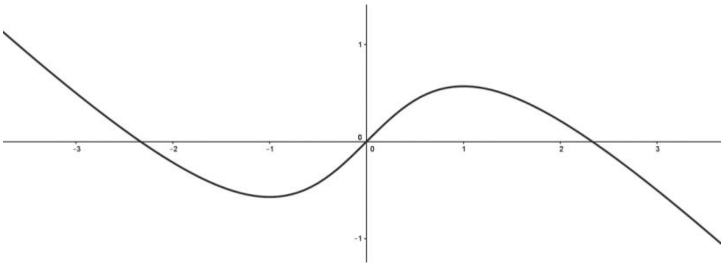
a) El producte $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ ens dona el nombre de cotxes que tenim de cada model: $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 480 & 385 \end{pmatrix}$.

b) El producte $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}$ ens dona el valor total dels cotxes emmagatzemats: $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P} = 6.259.650$.

Criteris de correcció: a) Significat de la matriu: 0,75p. Càlcul: 0,25 p. b) Significat de la matriu: 0,75p. Càlcul: 0,25 p.

---

6. A continuació es mostra la gràfica d’una funció f que presenta un mínim relatiu en el punt d’abscissa $x = -1$ i un màxim relatiu en el punt d’abscissa $x = 1$.

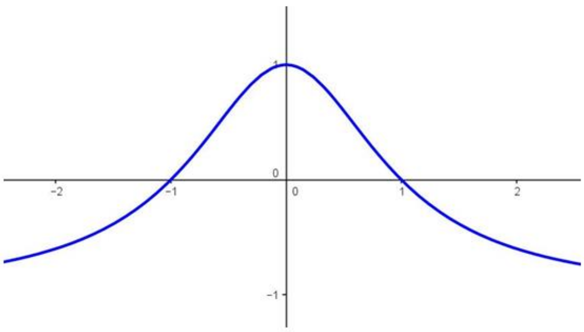


a) Sabent que $f'(0) = 1$, determineu l’equació de la recta tangent a f que passa per l’origen de coordenades. *[1 punt]*

b) Feu un esbós de la gràfica de la funció f' amb les dades de què disposeu. *[1 punt]*

a) El pendent de la recta tangent és 1, i passa per l'origen. Per tant l''equació serà $y = x$.

b) Com que f és decreixent fins a $x = -1$, en aquest interval f' serà negativa. Si $-1 < x < 1$ la funció és creixent. Per tant, la derivada és positiva, mentre que si $x > 1$ la derivada torna a ser negativa. Com que a més a més sabem que $f'(0) = 1$, la gràfica serà aproximadament així



Criteris de correcció: a) Obtenció del pendent: 0,5p. Equació de la recta: 0,5 p. b) Raonament: 0,5 p. Obtenció de la gràfica aproximada: 0,5 p.