SÈRIE 1

---

1. Considereu les matrius M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ en què a és un nombre real.
   a. Determineu a de manera que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$. *[1 punt]*
   b. Determineu a de manera que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, en què M^{-1} representa la matriu inversa de M. És a dir, $M \cdot M^{-1} = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2. *[1 punt]*

a) Comencem calculant M^2: $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix}$.
Sabem que $\begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$. Obtenim, per tant, que cal que es compleixi que $4 - a^2 = 3$ i que $-a^2 = -1$. En ambdós casos tenim que $a^2 = 1$, que té per solucions $a = 1$ i $a = -1$.

b) Sabem que $M \cdot M^{-1} = I$. Però com que sabem la forma que ha de tenir M^{-1}, tenim que $M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 2+2a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$. I imposant que aquesta darrera matriu ha de ser igual a la matriu identitat, tenim que $-a = 1$, és a dir, que $a = -1$, i que $2 + 2a = 0$, que també es compleix quan $a = -1$. Per tant, l'única solució és $a = -1$.
Alternativament es pot calcular la matriu inversa M^{-1} i igualar a la forma que ha de tenir segons l'enunciat del problema.

Criteris de correcció: a) Càlcul de M^2: 0,5 p. Plantejament de la igualtat matricial: 0,25 p. Obtenció dels dos possibles valors de a: 0,25 p. b) Plantejament del problema: 0,5 p. Obtenció del valor de a: 0,5 p.

---

2. Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$, en què a és un paràmetre real.
   a. Trobeu per a quins valors del paràmetre a la recta tangent a la funció f en $x = 1$ és paral·lela a $y + 3x + 5 = 0$. *[1 punt]*
   b. Per al valor del paràmetre $a = 1$, trobeu els intervals de creixement i decreixement i els punts on s'assoleixen els màxims i mínims relatius de la funció f. *[1 punt]*

a. Com que la derivada és el pendent de la recta tangent, hem d'imposar la condició $f'(1) = -3$. La derivada de la funció donada f és

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2\,a\,x}{(x-a)^2}$$

Per tant, hem de resoldre l'equació

$$\frac{1-2a}{(1-a)^2} = -3$$

o equivalentment $3\,a^2 - 8a + 4 = 0$, que dona com a solucions $a = 2$ i $a = \frac{2}{3}$.

b. Hem d'estudiar la funció $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ que té domini $\mathbb{R}$-$\{1\}$. La derivada és

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2\,x}{(x-1)^2}$$

i s'anul·la en $x = 0$ i $x = 2$.
Estudiant els signes de la derivada obtenim:

$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2, \infty)$
$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' > 0$
f creixent	f decreixent	f decreixent	f creixent

Es dedueix que la funció f té un màxim relatiu al punt $(0, f(0)) = (0,0)$ i un mínim relatiu al punt $(2, f(2)) = (2,4)$.

Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,25 p. Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció dels punts: 0,25 p. b) Obtenció dels intervals de creixement i decreixement: 0,5 p. Obtenció i justificació dels extrems relatius: 0,5 p.

---

3. En Pol va quedar ahir amb uns amics en un bar i van prendre 4 refrescos, 3 entrepans i 5 boles de gelat. Tot plegat els va costar 19,50€. Dies enrere, havia anat al mateix bar amb el seu cosí Martí i per 2 refrescos, 1 entrepà i 2 boles de gelat havien pagat 8,10€. En aquest bar tots els refrescos valen el mateix, tots els entrepans tenen el mateix preu i les boles de gelat es venen també a preu únic.
   a. Avui en Pol hi ha tornat amb uns altres amics i han pres 6 refrescos, 5 entrepans i 8 boles de gelat. Expliqueu raonadament quant han pagat en total. *[1 punt]*
   b. Si 1 refresc, 1 entrepà i 1 bola de gelat costen 5,10€, quant val el refresc, l'entrepà i la bola de gelat separadament? *[1 punt]*

a) Si anomenem x, y i z respectivament el preu d'un refresc, d'un entrepà i d'una bola de gelat sabem que es compleixen les dues equacions següents:

$$\begin{Bmatrix} 4x + 3y + 5z = 19{,}50 \\ 2x + y + 2z = 8{,}10 \end{Bmatrix}$$

Ara necessitem calcular el valor de $6x + 5y + 8z$, però observem que podem descompondre $6x + 5y + 8z$ en

$$2 \cdot (4x + 3y + 5z) - 1 \cdot (2x + y + 2z) = 6x + 5y + 8z$$

Per tant, el preu serà $2 \cdot 19{,}50 - 1 \cdot 8{,}10 = 30{,}90$€.

Una altra opció és buscar la solució del sistema $\begin{Bmatrix} 4x + 3y + 5z = 19{,}50 \\ 2x + y + 2z = 8{,}10 \end{Bmatrix}$, que és un sistema compatible indeterminat amb solució:

$\begin{Bmatrix} x = 2{,}40 - \frac{t}{2} \\ y = 3{,}30 - t \\ z = t \end{Bmatrix}$ i, per tant, $6x + 5y + 8z = 6 \cdot \left(2{,}40 - \frac{t}{2}\right) + 5 \cdot (3{,}30 - t) + 8t = 14{,}40 - 3t + 16{,}50 - 5t + 8t = 30{,}90$€.

b) En aquest cas, tenim el sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=5{,}10 \\ 4x+3y+5z=19{,}50 \\ 2x+y+2z=8{,}10 \end{array}\right\}$$ que, si el resolem, per exemple, pel mètode de Gauss obtenim $x=1{,}80€$, $y=2{,}10€$ i $z=1{,}20€$.

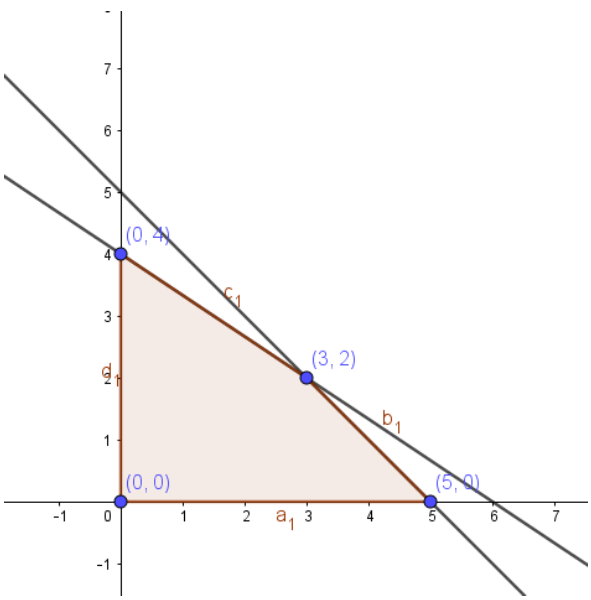
Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,25 p. Obtenció de la solució per qualsevol dels mètodes possibles: 0,75 p. b) Plantejament del sistema: 0,25 p. Obtenció de la solució: 0,75 p.

---

4. Una empresa de materials per a cotxes fabrica dos models d'una peça determinada, que anomenarem A i B. Cada model es fabrica en una hora, mitjançant un procés que consta de dues fases. En la primera fase del procés s'hi destinen 5 treballadors, i en la segona, 12. Per a fabricar cada model, en la primera fase es necessita un treballador per a cada peça. En canvi, en la segona fase es necessiten dos treballadors per al model A i 3 treballadors per al model B. El benefici que s'obté és de 40€ pel model A i 50€ pel model B.
   a. Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió factible. *[1,25 punts]*
   b. Quantes peces de cada model per hora s'hauran de fabricar per tal que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim? *[0,75 punts]*

a) Anomenem x la quantitat de peces del model A i y la quantitat de peces del model B.
L'enunciat del problema ens condueix a les restriccions següents:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y\leq 5 \\ 2x+3y\leq 12 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right.$$



Els beneficis venen donats per la següent funció objectiu: $B(x,y) = 40x + 50y$.

b) Si avaluem la funció objectiu en els quatre vèrtexs obtenim:
$B(0,0) = 0€$,
$B(5,0) = 200€$,
$B(0,4) = 200€$ i
$B(3,2) = 220€$.

Per tant, la funció objectiu assoleix en la regió factible el seu valor màxim en el punt (3,2) i aquest màxim pren el valor 220€. Així doncs, per a maximitzar els beneficis cal fabricar 3 peces del model A i 2 peces del model B. Amb aquesta fabricació l'empresa aconseguirà 220 euros de beneficis.

Criteris de correcció: Obtenció de les restriccions: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. Obtenció dels vèrtexs i dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció del punt pel qual s'assoleix el màxim: 0,5 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

---

5. Una companyia de mòbils va presentar fa un any un telèfon intel·ligent al preu de 750€. Recentment, un estudi de mercat ha arribat a la conclusió que, amb aquest preu, compren el telèfon 2.000 clients al mes, i que la relació entre aquestes dues variables és lineal, de manera que per cada 10 euros que s'incrementa el preu del mòbil, el compren 100 clients menys, i a l'inrevés: per cada 10 euros de descompte sobre el preu inicial de 750 euros, el compren 100 clients més.
   a. Deduïu que la funció que determina els ingressos mensuals de la companyia segons el preu del mòbil és $I(p) = -10p^2 + 9500p$. *[1 punt]*
   b. Trobeu quin ha de ser el preu del mòbil per a obtenir ingressos, el preu del mòbil que dona els ingressos mensuals més elevats i el valor d'aquests ingressos màxims. *[1 punt]*

a) El preu del mòbil serà $p = 750 + 10x$, en què x és el nombre de vegades que s'augmenta el preu de l'abonament en 10 euros. El nombre de mòbils que es vendran al mes serà $N = 2000 - 100x$.
L'ingrés mensual I vindrà donat pel preu del mòbil p multiplicat pel nombre de mòbils que es venguin N, és a dir, $I = p \cdot N$. Si volem posar la funció d'ingrés en funció del preu del mòbil, caldrà aïllar la x en funció del preu p $\left(p = 750 + 10x \rightarrow x = \frac{p-750}{10}\right)$, llavors el nombre de mòbils en funció del preu p serà: $N = 2000 - 100\left(\frac{p-750}{10}\right) \rightarrow N = -10p + 9500$. Així que la funció d'ingressos serà: $I(p) = p \cdot (-10p + 9500)$.
Obtenim, per tant, la paràbola $I(p) = -10p^2 + 9500p$.

b) Perquè hi hagi ingressos cal que $I(p) > 0 \rightarrow -10p^2 + 9500p > 0 \rightarrow p \cdot (-10p + 9500) > 0$. Per tant, o bé $p > 0$ i $-10p + 9500 > 0$, d'on obtenim $0€ < p < 950€$, o bé caldria que $p < 0$ i que $(-10p + 9500) < 0$, que no té sentit per la naturalesa del problema.

Per trobar el màxim ingrés derivem: $I'(p) = -20p + 9500$, i igualem a zero: $I'(p) = 0 \rightarrow p = 475$ €. Comprovem que correspon als ingressos màxims ja que $I'(p) > 0$, per a $p < 475$ i $I'(p) < 0$, per a $p > 475$. Finalment, per calcular el valor d'aquests ingressos màxims, només cal calcular el valor de la funció Ingrés per a $p = 475 \rightarrow I(475) = 475 \cdot (-10 \cdot 475 + 9500) = 475 \cdot 4750 = 2.256.250$€

També es pot resoldre tenint en compte que la gràfica de la funció d'ingrés és una paràbola i obtenint-ne el màxim.

Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,25 p. Obtenció de la funció d'ingressos: 0,75 p. b) Obtenció de l'interval de valors perquè hi hagi ingressos: 0,5 p. Obtenció del preu pel qual s'obté el màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim i obtenció dels beneficis màxims: 0,25 p.

---

6. El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció $P(t) = \frac{5+t^2}{(t+1)^2}$, en què t mesura el nombre d'anys transcorreguts.
   a. Quina és la població inicial i la població després de 9 anys? A partir de quin moment la població serà inferior a un milió d'individus? *[1 punt]*
   b. Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirà el nombre d'individus de la població? *[1 punt]*

a) Ens demanen que calculem la població inicial $P(0) = 5$ milions d'habitants i la població al cap de 9 anys, $P(9) = 0{,}86$ milions d'habitants.

Hem de trobar també a partir de quin instant la població serà inferior a un milió d'habitants, és a dir, per a quin valor de t es compleix $\frac{5+t^2}{(t+1)^2} < 1$. Aïllant obtenim $t > 2$, és a dir, a partir del segon any la població serà inferior a un milió d'habitants.

b) Hem de calcular el límit quan el temps tendeix a infinit. Tenim que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{5+t^2}{(t+1)^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2+5}{t^2+2t+1} = 1$$

Per tant, la grandària de la població a llarg termini tendirà a un milió d'habitants.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la població inicial: 0,25 p. Càlcul de la població al cap de 9 anys: 0,25 p. Càlcul de l'instant en què la població passa a ser inferior a un milió d'habitants: 0,5 p. b) Plantejament que cal calcular el límit: 0,25 p. Càlcul del límit: 0,75 p.
