Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

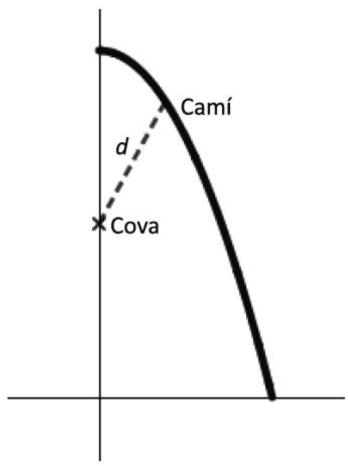
Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Sigui $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Determineu el rang de la matriu $\boldsymbol{A}$ en funció del paràmetre a.
[1,25 punts]

b) Comproveu que $\det(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A})=0$.
[1,25 punts]

2. S'han trobat unes pintures rupestres en una cova situada en una zona molt pedregosa. Hi ha un camí que voreja parcialment la cova format per l'arc de corba $y=4-x^2$ d'extrems (0, 4) i (2, 0). La cova està situada en el punt de coordenades (0, 2), tal com es mostra en la figura, i es vol habilitar un accés rectilini d des del camí a la cova que sigui el més curt possible.



a) Identifiqueu a la gràfica de la figura les coordenades de la cova i del punt del camí des d'on es vol habilitar l'accés. Comproveu que la funció $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}$ calcula la distància des de cada punt del camí a la cova.
[1,25 punts]

b) Calculeu les coordenades del punt del camí que queda més a prop de la cova i digueu quina serà la longitud de l'accés d.
[1,25 punts]

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1,25 punts]

b) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.
[1,25 punts]

4. Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$, en què ln indica el logaritme neperià, definida per a $x > 0$.

a) Calculeu les coordenades del punt de la corba $y = f(x)$ en què la recta tangent a la corba en aquest punt és horitzontal. Estudieu si aquest punt és un extrem relatiu i classifiqueu-lo.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'àrea del recinte delimitat per la corba $y = f(x)$, les rectes verticals $x = 1$ i $x = \mathrm{e}$ i l'eix de les abscisses.
[1,25 punts]

5. Considereu la recta r d'equació $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ i la recta s que passa pel punt $P = (2, -5, 1)$ i que té per vector director $(-1, 0, -1)$.

a) Estudieu la posició relativa de les rectes r i s.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'equació general del pla que és paral·lel a la recta r i conté la recta s.
[1,25 punts]

6. Una empresa de ceràmica vol posar a la venda una rajola quadrada de 20 cm de costat pintada a dos colors, de manera que la superfície de cada color sigui la mateixa i que si es posen les rajoles l'una al costat de l'altra es vegi un dibuix continu (figura 1).

Figura 1

Figura 2

Per a fer-ho, l'empresa utilitza en cada rajola la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ enquadrada entre els punts de coordenades (0, 0), (0, 2), (2, 0) i (2, 2), tal com es mostra en la figura 2, i fa servir com a unitat de mesura el decímetre.

a) Justifiqueu que, efectivament, aquesta funció permet ajuntar les rajoles de manera contínua i derivable.
[1,25 punts]

b) Justifiqueu que aquesta funció divideix el quadrat esmentat en dues parts que tenen la mateixa superfície.
[1,25 punts]