

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

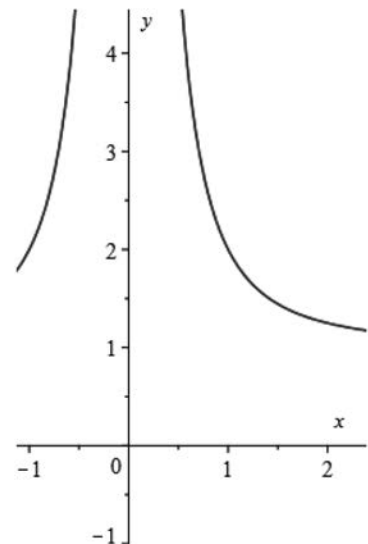
1. Tracem la recta tangent a la funció $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ per un punt

$P = (a, f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.

- a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció de a , ve donada per la funció

$$g(a) = \frac{(a^2 + 3)^2}{4a}.$$

[1,25 punts]



- b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.

[1,25 punts]

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k :

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

- a) Discuti el sistema per als diferents valors del paràmetre k .

[1,25 punts]

- b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k = 0$.

[1,25 punts]

3. **a)** Calculeu l'equació general del pla π que passa pel punt $(8, 8, 8)$ i té com a vectors directors $\mathbf{u} = (1, 2, -3)$ i $\mathbf{v} = (-1, 0, 3)$.
[1,25 punts]
- b)** Determineu el valor del paràmetre a perquè el punt $(1, -5, a)$ pertanyi al pla π i calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per aquest punt i és perpendicular al pla π .
[1,25 punts]
4. Considereu la funció $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$, en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els valors de a i b de manera que la funció $f(x)$ tingui una asymptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 2$.
[2,5 punts]
5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.
- a)** Trobeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = I - 3X$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.
[1,25 punts]
- b)** Comproveu que la matriu X és invertible i calculeu-ne la matriu inversa.
[1,25 punts]
6. Considereu la funció $f(x) = x^3$.
- a)** Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.
[1,25 punts]
- b)** Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.
[1,25 punts]

