



Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Volem construir un marc rectangular de fusta que delimiti una àrea de 2 m^2 . Sabem que el preu de la fusta és de $7,5 \text{ €/m}$ per als costats horitzontals i de $12,5 \text{ €/m}$ per als costats verticals. Determineu les dimensions que ha de tenir el rectangle perquè el cost total del marc sigui el mínim possible. Quin és aquest cost mínim?

[2 punts]

2. Siguin la recta $r: \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ i el pla $\pi: x - z = 3$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que és perpendicular al pla π i que el talla en el mateix punt en què el talla la recta r .

[1 punt]

b) Trobeu els punts de r que estan a una distància de $\sqrt{8}$ unitats del pla π .

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al

pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a :

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a .

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.

[1 punt]

4. Considereu la funció $f(x)$, que depèn dels paràmetres reals n i m i és definida per

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + n & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} + m & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calculeu els valors de n i m perquè la funció sigui contínua a tot el conjunt dels nombres reals.

[1 punt]

b) Per al cas $n = -4$ i $m = -6$, calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.

[1 punt]

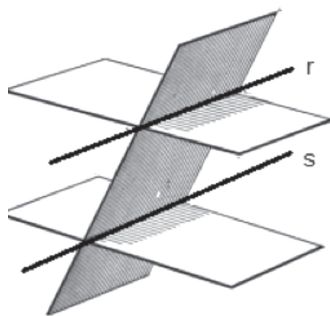
5. Considereu els plans $\pi_1: 2x + ay + z = 5$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 2x + (a + 1)y + (a + 1)z = 0$, en què a és un paràmetre real.

a) Estudieu per a quins valors del paràmetre a els tres plans es tallen en un punt.

[1 punt]

b) Comproveu que per al cas $a = 1$ la interpretació geomètrica del sistema format per les equacions dels tres plans és la que es mostra en la imatge següent:

[1 punt]



6. Sabem que una funció $f(x)$ és contínua i derivable a tots els nombres reals, que té com a segona derivada $f''(x) = 6x$ i que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és horitzontal.

a) Determineu l'abscissa dels punts d'inflexió de la funció f i els intervals de concavitat i convexitat. Justifiqueu que la funció f té un mínim relatiu en $x = 1$.

[1 punt]

b) Sabent, a més, que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $y = 5$, calculeu l'expressió de la funció f .

[1 punt]