

## Proves d'accés a la universitat

---

# Matemàtiques

## Sèrie 5

---

Responen a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que permetin emmagatzemar dades o que puguin transmetre o rebre informació.

---

1. Considereu el sistema d'equacions lineals 
$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3, \text{ per a } m \in \mathbb{R}. \\ x + 3y + 2z = m \end{cases}$$
  - a) Expliqueu raonadament que per a qualsevol valor del paràmetre  $m$  el sistema té una única solució.  
[1 punt]
  - b) Resoleu el sistema i trobeu l'expressió general del punt solució.  
[1 punt]
2. Sigui el pla d'equació  $\pi: x + y - z = 0$  i el punt  $P = (2, 3, 2)$ .
  - a) Calculeu el punt simètric del punt  $P$  respecte del pla  $\pi$ .  
[1 punt]
  - b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma  $Ax + By + Cz = D$ ) dels dos plans paral·lels a  $\pi$  que estan a una distància  $\sqrt{3}$  del punt  $P$ .  
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades  $(x_0, y_0, z_0)$  al pla d'equació  $Ax + By + Cz + D = 0$  amb l'expressió  $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .
3. Sigui la funció  $f(x) = a \cdot e^{-x^2 + bx}$ , amb  $a \neq 0$  i  $b \neq 0$ .
  - a) Calculeu els valors de  $a$  i de  $b$  que fan que la funció tingui un extrem relatiu en el punt  $(1, e)$ .  
[1 punt]
  - b) Per al cas  $a = 3$  i  $b = 5$ , calculeu l'asíptota horitzontal de la funció  $f$  quan  $x$  tendeix a  $+\infty$ .  
[1 punt]

4. Sabem que una funció  $f(x)$  està definida per a tots els nombres reals i que és derivable dues vegades. Sabem també que té un punt d'inflexió en el punt d'abscissa  $x = 2$ , que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció  $f(x)$  en aquest punt és  $y = -124x + 249$  i que  $f(-3) = -4$ .

a) Calculeu  $f''(2)$ ,  $f'(2)$  i  $f(2)$ .

[1 punt]

b) Calculeu  $\int_{-3}^2 f'(x) dx$ .

[1 punt]

5. Siguin les rectes  $r_1: x - 1 = \frac{y - 2}{-1} = z - 5$  i  $r_2: (x, y, z) = (2 - 3\lambda, -1 + \lambda, 2)$ .

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma  $Ax + By + Cz = D$ ) del pla que conté la recta  $r_1$  i és paral·lel a la recta  $r_2$ .

[1 punt]

b) Diguen quina condició s'ha de complir perquè existeixi un pla que contingui la recta  $r_1$  i sigui perpendicular a la recta  $r_2$ . Amb les rectes  $r_1$  i  $r_2$  de l'enunciat, comproveu si existeix un pla que contingui la recta  $r_1$  i sigui perpendicular a la recta  $r_2$ .

[1 punt]

6. Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Si  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  és la matriu identitat d'ordre 3, calculeu per a quins valors de  $k$  la

matriu  $A + kI$  té inversa. Trobeu, si existeix, la matriu inversa de  $A - 2I$ .

[1 punt]

b) Calculeu la matriu  $X$  que satisfà l'equació  $X \cdot A + A^T = 2 \cdot X$ , en què  $A^T$  és la matriu transposada de la matriu  $A$ .

[1 punt]



Institut  
d'Estudis  
Catalans