



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que permetin emmagatzemar dades o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Siguin les matrius $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ i $N = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu $M \cdot N$ i comproveu que la matriu resultant no és invertible.

[1 punt]

b) Trobeu els valors de t per als quals la matriu $N \cdot M$ és invertible.

[1 punt]

2. Sigui r la recta que passa pels punts $A = (0, 1, 1)$ i $B = (1, 1, -1)$.

a) Trobeu l'equació paramètrica de la recta r .

[1 punt]

b) Calculeu tots els punts de la recta r que estan a la mateixa distància dels plans $\pi_1: x + y = -2$ i $\pi_2: x - z = 1$.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ amb l'expressió } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3. Sigui la funció $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica i que és paral·lela a la recta d'equació $x + 3y = 0$.

[1 punt]

b) Calculeu, si n'hi ha, els punts de la gràfica en què la funció presenta un màxim o mínim relatiu o un punt d'inflexió.

[1 punt]

4. Considereu els punts $P = (3, -2, 1)$, $Q = (5, 0, 3)$, $R = (1, 2, 3)$ i la recta $r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$.
- a) Determineu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa per P i Q i és paral·lel a la recta r .
[1 punt]
- b) Donats el pla $x + 2y + m \cdot z = 7$ i el pla que passa per P , Q i R , trobeu m perquè siguin paral·lels i no coincidents.
[1 punt]
5. Sigui la funció $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.
- a) Comproveu que la funció $f(x)$ compleix l'enunciat del teorema de Bolzano a l'interval $[0, 2]$ i que, per tant, l'equació $f(x) = 0$ té alguna solució a l'interval $(0, 2)$. Comproveu que $x = 1$ és una solució de l'equació $f(x) = 0$ i raoneu, tenint en compte el signe de $f'(x)$, que la solució és única.
[1 punt]
- b) A partir del resultat final de l'apartat anterior, trobeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 1$.
[1 punt]
6. Uns estudiants de batxillerat han programat un full de càlcul com el de la figura següent que dona la solució d'un sistema d'equacions compatible determinat d'una manera automàtica:

| | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|----|---|---|---|----|----|----|---|---|---|--------------------------------|
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | |
| 6 | | | x | y | z | | | | | sistema: COMPATIBLE DETERMINAT |
| 7 | | | 1 | 2 | -1 | -6 | | | | x = 1 |
| 8 | | | 1 | -1 | -2 | -3 | | | | y = -2 |
| 9 | | | 2 | 1 | 2 | 6 | | | | z = 3 |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | |

- a) Escriviu el sistema i comproveu que els valors proposats com a solució són correctes.
[1 punt]
- b) Quin valor s'hauria de posar en lloc del 2 que està emmarcat en la imatge, corresponent a la cella E8 (a_{33} de la matriu de coeficients), perquè el sistema fos incompatible?
[1 punt]